

Kvaliteten af grænseværdier for det kvadratiske knapsackproblem

Rune Sandvik, Anders Bo Rasmussen

Indhold

1	Indledning	3
1.1	Det kvadratiske knapsackproblem	3
1.1.1	Kompleksitet af QK	4
1.1.2	Anvendelser	5
1.1.3	Litteraturoversigt	5
1.2	Notation	5
1.2.1	Matrixnotation	6
1.3	Subgradientmetoden	6
2	Øvre grænser for kvadratisk knapsack	9
2.1	Upper planes	9
2.1.1	Gallo, Hammer og Simeone	9
2.2	Linearisering	12
2.2.1	Billionet og Calmels	12
2.2.2	Caprara, Pisinger og Toth	15
2.3	Lagrange relaxering	19
2.3.1	Chaillou, Hansen og Mahieu	19
2.4	Lagrange decomposition	21
2.4.1	Michelon og Veilleux	21
2.4.2	Billionet, Faye, Soutif	24
2.5	Grænseværdier baseret på SDP	28
2.5.1	Implementation	32

3	Numerisk test	35
3.1	Testinstanser	35
3.2	Resultater	36
3.3	Kvalitet/beregningstid	36
3.4	Anvendelse i <i>branch & bound</i>	38
3.5	Dominansforhold	38
3.6	Konklusion	39
4	Resultater	41
4.1	Grænser baseret på upper planes (2.1)	42
4.2	Grænser baseret på lagrange relaxering (2.3.1, 2.4.1)	43
4.3	Grænser baseret på linearisering (2.2)	44
4.4	Grænser baseret på sdp (2.5)	45

Kapitel 1

Indledning

Formålet med dette projekt er at undersøge kvaliteten af en række øvre grænseværdier beskrevet i [16]. Vores bidrag består hovedsageligt i at have implementeret disse grænseværdier effektivt og at have uddybet nogle detaljer der er nødvendige for implementationen. Desuden er vi gået lidt mere i detaljer omkring hvilke dominansforhold der eksisterer og ikke eksisterer mellem grænseværdierne.

Beviser der kan findes i [16] er udeladt, når de ikke er vigtige for at forstå udledningen af grænseværdierne.

1.1 Det kvadratiske knapsackproblem

Det kvadratiske knapsackproblem (QK) er givet ved:

$$\begin{aligned} \text{maksimer } z(\text{QK}) &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} p_{ij} x_i x_j \\ \text{mht.} \quad &\sum_{i \in N} w_i x_i \leq c \\ &x_i \in \{0, 1\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

hvor $p_{ij} \geq 0$, $w_i \geq 0$, $c \geq 0$ og $N = \{1, \dots, n\}$.

Definer en matrix λ således at:

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} -\lambda_{ji} & \text{for } i \neq j \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

For en instans (p, w, c) defineres en tilsvarende instans (\hat{p}, w, c) hvor $\hat{p}_{ij} = p_{ij} + \lambda_{ij}$. Da ses at

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \hat{p}_{ij} x_i x_j &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} (p_{ij} + \lambda_{ij}) x_i x_j \\ &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} p_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

Altså har instanserne (p, w, c) og (\hat{p}, w, c) samme løsning. Sættes $\lambda_{ij} = (p_{ji} - p_{ij})/2$ fås at $\hat{p}_{ij} = p_{ij} + (p_{ji} - p_{ij})/2 = p_{ji} + (p_{ij} - p_{ji})/2 = \hat{p}_{ji}$. Vi kan således uden tab af generalitet antage at p er symmetrisk.

Vi antager at alle elementerne ikke kan være i knapsacken på en gang

$$\sum_{i \in N} w_i > c \quad (1.2)$$

og at ingen elementer vejer for meget til at være det eneste element i knapsacken

$$\forall i : w_i < c. \quad (1.3)$$

1.1.1 Komplexitet af QK

Det lineare 0-1 knapsackproblem (herefter 0-1 knapsackproblem) er defineret som

$$\begin{array}{ll} \text{maksimer} & \sum_{i \in N} \hat{p}_i x_i \\ \text{mht.} & \sum_{i \in N} w_i x_i \leq c \\ & x_i \in \{0, 1\} \end{array} \quad (1.4)$$

Givet en instans (\hat{p}, w) af 0-1 knapsackproblemet defineres en instans af QK ved

$$\begin{array}{ll} p_{ii} = \hat{p}_i & \text{for } i \in N \\ p_{ij} = 0 & \text{for } i \neq j \end{array}$$

Da vil

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} p_{ij} x_i x_j = \sum_{i \in N} \hat{p}_i x_i$$

Altså kan enhver instans af 0-1 knapsackproblemet reduceres i polynomiel tid til QK. Da 0-1 knapsackproblemet er \mathcal{NP} -hårdt er således QK \mathcal{NP} -hårdt.

Clique-problemet består i, at for en givet graf $G = (V, E)$ at bestemme hvorvidt der findes en komplet delgraf med netop k knuder. QK ses at være en generalisering af Clique på følgende måde: Betragt k -Dense Subgraph problemet, hvor man skal finde en delgraf af størrelse k med flest kanter af en givet graf $G = (V, E)$. Dette kan modelleres som QK ved at vælge $N = \{1, \dots, |V|\}$, $c = k$, $w_j = 1$ for $j \in N$, $p_{ij} = 1$ for $(i, j) \in E$ og $p_{ij} = 0$ ellers. Bemærk at der altid findes en optimal løsning til dette QK således at kapacitetsbegrænsningen er opfyldt med lighed. Da vil $x_i x_j = 1$ svare til at (i, j) er valgt i løsningen til k -Dense Subgraph. En komplet graf har $k(k-1)/2$ kanter, så svaret til Clique er sandt netop når resultatet af k -Dense Subgraph er $k(k-1)$. Clique er stærkt \mathcal{NP} -hårdt og det kan vises at QK er stærkt \mathcal{NP} -hårdt ved reduktion fra Clique.

1.1.2 Anvendelser

QK er det simpleste begrænsede kvadratiske maksimeringsproblem. Alene af den grund er det interessant at undersøge. Der findes flere anvendelser af **QK**. Witzgall [13] behandler et problem, hvor en række satellitstationer skal placeres således at den totale kommunikation mellem dem maksimeres. Man kan forestille sig mange andre lignende lokaliseringsproblemer der kan formuleres som **QK**. Johnson, Mehrotra og Nemhauser [14] nævner et compilerdesign-problem der kan modelleres som **QK**.

1.1.3 Litteraturoversigt

Litteraturen om **QK** er koncentreret omkring øvre grænser, approksimationsalgoritmer (nedre grænser) og *branch & bound* algoritmer. Nogle artikler præsenterer kun en øvre grænse eller approksimationsalgoritme, mens andre også omfatter deres anvendelse i en *branch & bound* algoritme. Mængden af eksperimentelle data i de forskellige artikler er meget varierende. **QK** blev introduceret af Gallo, Hammer og Simone i [3]. Her giver de en række øvre grænseværdier baseret på *upper planes* og anvender dem i en *branch & bound* algoritme. Mange øvre grænseværdier baseret på *Lagrange relaxsation/decomposition* er blevet foreslået. Chaillou, Hansen og Mahieu [8] og Caprara, Pisinger og Toth [5] anvender *Lagrange-relaksation* i deres grænseværdier. Michelon og Veilleux [9] samt Billionet, Faye og Soutif [4] foreslår grænser der anvender *Lagrange-decomposition*. Anvendelsen af *LP-relaksation* til at udlede grænseværdier og anvendelse i *branch & bound* undersøges af Billionet og Calmels [6] og øvre grænseværdier udledt ved at anvende *semidefinit programmering* er blevet behandlet af Helmberg, Rendel og Weismantel [15].

1.2 Notation

Givet to funktioner f og g , mener vi med $f \leq g$, at $\forall x : f(x) \leq g(x)$. Hvis dette ikke er tilfældet, det vil sige at $\exists x : f(x) > g(x)$, skriver vi $f \not\leq g$.

Med en øvre grænseværdi til en funktion $f(I)$, mener vi en funktion $\mathcal{U}(I)$ så $f \leq \mathcal{U}$. Det vil sige at for alle instanser I giver den øvre grænseværdi en værdi der ikke er lavere end funktionsværdien.

Givet et problem P betegner vi den optimale løsning $z(P)$.

1.2.1 Matrixnotation

Med $\mathbb{M}_{m,n}$ mener vi mængden af $n \times m$ matrixer, hvor elementerne er indeholdt i \mathbb{R} .

Vi definerer *matrixindreproduktet* af $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}$ til

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

Vektorproduktet af $a, b \in \mathbb{R}^n$ er givet ved,

$$ab^T = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

Definer $\text{diag}(A)$ som værende en vektor bestående af diagonalelementerne i $A \in \mathbb{M}_{n,n}$. Omvendt defineres $\text{Diag}(b)$ hvor $b \in \mathbb{R}^n$ til at være en $n \times n$ matrix med elementerne fra b i diagonalen.

1.3 Subgradientmetoden

I det næste kapitel anvender vi *subgradientmetoden*. Vi giver derfor i det følgende afsnit en kort introduktion til denne og hvordan den anvendes til at approksimere den *Lagrange-duale*.

Betragt et problem på formen:

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimer} & f(x) \\ \text{mht.} & g_i(x) = b_i \quad i = \{1, \dots, m\} \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array} \quad (\text{P})$$

Antag vi har *Lagrange-relakseret* en delmængde T af begrænsningerne, således at vi har *Lagrange-subproblemet*:

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimer} & z(S(\lambda)) = f(x) + \sum_{j \in T} \lambda_j (b_j - g_j(x)) \\ \text{mht.} & g_i(x) = b_i, \quad i \in \{1, \dots, m\} \setminus T \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array} \quad (\text{S})$$

Der gælder da at $z(S(\lambda))$ er en øvre grænse for (P) for ethvert $\lambda \in \mathbb{R}^{|T|}$. Desuden er $z(S(\lambda))$ en konveks funktion som funktion af λ .

Det *Lagrange-duale* problem er givet ved,

$$z(LD) = \min_{\lambda \in \mathbb{R}^{|T|}} z(S(\lambda))$$

I tilfældet hvor f og g_i , $i = \{1, \dots, m\}$ er lineare funktioner er løsningen til den *Lagrange duale* lig løsningen til (P). *Subgradientmetoden* er en metode til at approksimere løsningen til den *Lagrange-duale*.

Definition 1.3.1 En *subgradient* til en konveks funktion $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ i punktet u er en vektor $\mu \in \mathbb{R}^k$ således at:

$$\forall v \in \mathbb{R}^m : f(v) \geq f(u) + \mu^T(v - u)$$

I tilfældet hvor f er differentiabel er subgradienten lig gradienten. Vi kan derfor se subgradienten som en generalisering af gradienten til ikke differentiable funktioner.

Sætning 1.3.2 [7] Lad x' være en løsning til (S) for $\lambda = \lambda'$. Definer $\mu \in \mathbb{R}^{|T|}$ så,

$$\mu_j = b_j - g_j(x') \quad j \in T$$

Da er μ en subgradient for $z(S(\lambda))$ i λ' .

Princippet i subgradientalgoritmen er at tage små skridt i modsat retning af subgradienten.

1. $\lambda^0 = 0, k = 0$

Iterer indtil stop-kriterie er opfyldt:

2. Løs Lagrange subproblemet $S(\lambda^k)$ med optimal løsning x' .

3. Find subgradienten μ^k defineret ved $\mu_j^k = b_j - g_j(x') \quad j \in T$.

4. Bestem skridtlængden $\epsilon^k > 0$.

5. $\lambda^{k+1} = \lambda^k - \epsilon^k \mu^k$

6. $k = k + 1$

For at sikre gode konvergenssegenskaber for subgradientalgoritmen er det vigtigt at vælge skridtlængden ϵ^k korrekt. En mulighed er at vælge ϵ^k som en geometrisk række, men dette er typisk ikke godt i praksis.

Ideen bag den heuristik vi anvender til at finde ϵ^k er følgende:

- Når løsningen til $S(\lambda^k)$ er langt fra den optimale værdi, skal skridtlængden være lang.
- Hvis der ikke er forekommet en forbedring i en række iterationer skal skridtlængden være mindre.

I vores anvendelse vil (P) være **QK** problemet. For at estimere afstanden fra den optimale løsning til **QK** anvender vi en heuristik fra [5] til at finde en nedre grænse Z_{lower} .

Vi vælger ϵ^k på følgende måde:

$$\epsilon^k = \min \left\{ \alpha \left(z(S(\lambda^k)) - Z_{\text{lower}} \right), M \right\}$$

Hvor $0 < \alpha < 1$ er et tal man lader aftage efter en geometrisk række. Når der ikke har været en forbedring i l iterationer lader man α aftage. Hvor hurtigt α skal aftage samt startværdien af α er afhængig af det enkelte *Lagrange subproblem*. Værdien $M > 0$ er en øvre grænse for hvor stor skridtlængde der accepteres.

Kapitel 2

Øvre grænser for kvadratisk knapsack

2.1 Upper planes

2.1.1 Gallo, Hammer og Simeone

I dette afsnit antager vi at elementerne er sorteret efter stigende vægt

$$\forall i \forall j : i > j \Rightarrow w_i \geq w_j \quad (2.1)$$

QK blev introduceret af Gallo, Hammer og Simeone i [3], hvor de blandt andet foreslog fire øvre grænser af formen

$$\begin{array}{ll} \text{maksimer} & \sum_{i \in N} \pi_i x_i \\ \text{mht.} & \sum_{i \in N} w_i x_j \leq c \\ & x_j \in \{0, 1\}, j \in N \end{array} \quad (2.2)$$

hvor π_i er en øvre grænse for $\sum_{j \in N} p_{ij} x_j$ for alle lovlige løsninger x til det oprindelige **QK**-problem.

Da

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} p_{ij} x_i x_j = \sum_{i \in N} x_i \sum_{j \in N} p_{ij} x_j \leq \sum_{i \in N} x_i \pi_i \quad (2.3)$$

vil ethvert π_i der er en øvre grænseværdi for $\sum_{j \in N} p_{ij} x_j$ indsat i knapsack-problemet (2.2) give en øvre grænseværdi for **QK**.

Gallo, Hammer og Simone foreslog følgende fire grænser π_i :

$$\pi_i^1 = \sum_{j \in N} p_{ij}$$

hvilket klart giver en øvre grænseværdi, da $\sum_{j \in N} p_{ij} 1 \geq \sum_{j \in N} p_{ij} x_j$

$$\pi_i^2 = \max \left\{ \sum_{j \in N} p_{ij} v_j : \sum_{j \in N} v_j \leq k, v_j \in \{0, 1\} \right\}$$

hvor

$$k = \max \left\{ n' \mid \sum_{i=1}^{n'} w_i \leq c \right\}$$

er det maksimale antal elementer der kan forekomme i en lovlig løsning, da vi antog at vægten er stigende (2.1). Vi maksimerer derfor over alle lovlige og nogle ulovlige løsninger til **QK**-problemet, og π_i^2 er derfor en øvre grænse til $\sum_{j \in N} p_{ij} x_j$.

$$\pi_i^3 = \max \left\{ \sum_{j \in N} p_{ij} v_j : \sum_{j \in N} v_j w_j \leq c, v_j \in [0, 1] \right\}$$

$$\pi_i^4 = \max \left\{ \sum_{j \in N} p_{ij} v_j : \sum_{j \in N} v_j w_j \leq c, v_j \in \{0, 1\} \right\}$$

Af samme årsag som π_i^2 er π_i^3 og π_i^4 øvre grænser. Vi kalder de øvre grænser vi får fra π_i^m for \mathcal{U}_{ghs}^m . Da $\pi_i^2 \leq \pi_i^1$, $\pi_i^3 \leq \pi_i^1$, $\pi_i^4 \leq \pi_i^3$ og $\pi_i^4 \leq \pi_i^2$ er $\mathcal{U}_{ghs}^2 \leq \mathcal{U}_{ghs}^1$, $\mathcal{U}_{ghs}^3 \leq \mathcal{U}_{ghs}^1$, $\mathcal{U}_{ghs}^4 \leq \mathcal{U}_{ghs}^3$ og $\mathcal{U}_{ghs}^4 \leq \mathcal{U}_{ghs}^2$.

Der kan let konstrueres eksempler der viser, at der hverken gælder $\mathcal{U}_{ghs}^2 \leq \mathcal{U}_{ghs}^3$ eller $\mathcal{U}_{ghs}^3 \leq \mathcal{U}_{ghs}^2$. Eksempler på dette er vist i figur 2.1 og figur 2.2.

π_i^2 , π_i^3 , π_i^4 kan let forbedres uden at beregningstiden stiger, ved at sætte $v_i = 1$:

$$\hat{\pi}_i^2 = \max \left\{ \sum_{j \in N} p_{ij} v_j : \sum_{j \in N} v_j \leq k, v_j \in \{0, 1\}, v_i = 1 \right\} \quad (2.4)$$

c	3
w_i	1 2 2
p_{ij}	0 0 0 0 0 2 0 0 2
π_i^2	0 0 4
π_i^3	0 0 3

$\mathcal{U}_{ghs}^2 = 4$
$\mathcal{U}_{ghs}^3 = 3$

c	3
w_i	2 2
p_{ij}	2 2 2 2
π_i^2	2 2
π_i^3	3 3

$\mathcal{U}_{ghs}^2 = 2$
$\mathcal{U}_{ghs}^3 = 3$

Figur 2.1: Eksempel på at $\mathcal{U}_{ghs}^2 \not\leq \mathcal{U}_{ghs}^3$ Figur 2.2: Eksempel på at $\mathcal{U}_{ghs}^3 \not\leq \mathcal{U}_{ghs}^2$

$$\hat{\pi}_i^3 = \max \left\{ \sum_{j \in N} p_{ij} v_j : \sum_{j \in N} v_j w_j \leq c, v_j \in [0, 1], v_i = 1 \right\} \quad (2.5)$$

$$\hat{\pi}_i^4 = \max \left\{ \sum_{j \in N} p_{ij} v_j : \sum_{j \in N} v_j w_j \leq c, v_j \in \{0, 1\}, v_i = 1 \right\} \quad (2.6)$$

$\hat{\pi}_i^m$ er en øvre grænse for $\sum_{j \in N} p_{ij} x_j$, hvis man ved, at $x_i = 1$. Dette er tilstrækkeligt til at $\hat{\pi}_i^m$ er en øvre grænse for **QK**, da uligheden i (2.3) stadig gælder.

Vi kalder den øvre grænseværdi baseret på $\hat{\pi}_i^m$ for $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^m$.

Da $\hat{\pi}_i^m$ har den samme objektfunktion som π_i^m , men et mindre løsningsrum, har vi at $\hat{\pi}_i^m \leq \pi_i^m$. Dette medfører at $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^m \leq \mathcal{U}_{ghs}^m$. Som før ses let at $\hat{\pi}_i^2 \leq \pi_i^1$, $\hat{\pi}_i^3 \leq \pi_i^1$, $\hat{\pi}_i^4 \leq \hat{\pi}_i^3$ og $\hat{\pi}_i^4 \leq \hat{\pi}_i^2$ hvilket igen giver at $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^2 \leq \mathcal{U}_{ghs}^1$, $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^3 \leq \mathcal{U}_{ghs}^1$, $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^4 \leq \hat{\mathcal{U}}_{ghs}^3$ og $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^4 \leq \hat{\mathcal{U}}_{ghs}^2$.

Der kan let konstrueres eksempler der viser at der hverken gælder $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^2 \leq \hat{\mathcal{U}}_{ghs}^3$ eller $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^3 \leq \hat{\mathcal{U}}_{ghs}^2$. Et eksempel på at $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^2 \not\leq \hat{\mathcal{U}}_{ghs}^3$ er figur 2.1, da $\pi_i^2 = \hat{\pi}_i^2$ og $\pi_i^3 = \hat{\pi}_i^3$ i dette eksempel. Det viser også, at $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^2 \not\leq \mathcal{U}_{ghs}^3$. Tilsvarende viser figur 2.2 at $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^3 \not\leq \hat{\mathcal{U}}_{ghs}^2$ og $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^3 \not\leq \mathcal{U}_{ghs}^2$.

For alle $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ og $l \in \{2, 3, 4\}$ har vi at $\mathcal{U}_{ghs}^k \not\leq \hat{\mathcal{U}}_{ghs}^l$. Et eksempel der beviser disse 12 relationer er vist i figur 2.3. I dette eksempel har vi nemlig $\mathcal{U}_{ghs}^1 = \mathcal{U}_{ghs}^2 = \mathcal{U}_{ghs}^3 = \mathcal{U}_{ghs}^4 = 1$, mens $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^2 = \hat{\mathcal{U}}_{ghs}^3 = \hat{\mathcal{U}}_{ghs}^4 = 0$.

Vi har også at $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^2 \not\leq \mathcal{U}_{ghs}^4$ og $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^3 \not\leq \mathcal{U}_{ghs}^4$. Det kan let vises ved et eksempel. Det kan dog også bevises let. Antag $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^2 \leq \mathcal{U}_{ghs}^4$. Da $\mathcal{U}_{ghs}^4 \leq \mathcal{U}_{ghs}^3$ og vores \leq -relation er transitiv giver det at $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^2 \leq \mathcal{U}_{ghs}^3$, hvilket vi tidligere har vist ikke er tilfældet. Altså er vores antagelse forkert. Det vil sige at $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^2 \not\leq \mathcal{U}_{ghs}^4$. $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^3 \not\leq \mathcal{U}_{ghs}^4$ kan vises tilsvarende.

c	1		
w_i	1	1	
p_{ij}	0	1	
	1	0	
π_i^k	1	1	$U_{ghs}^k = 1$
$\hat{\pi}_i^l$	0	0	$\hat{U}_{ghs}^l = 0$

Figur 2.3: Eksempel på at $U_{ghs}^k \not\leq \hat{U}_{ghs}^l$

De forhold mellem U_{ghs}^k og \hat{U}_{ghs}^l , som vi ikke allerede har vist kan vises ved transitiviteten af vores \leq -relation. For eksempel er $\hat{U}_{ghs}^3 \leq U_{ghs}^1$, da $\hat{U}_{ghs}^3 \leq U_{ghs}^3$ og $U_{ghs}^3 \leq U_{ghs}^1$.

Implementation

π_i^k og $\hat{\pi}_i^k$ er stadig en øvre grænse for $\sum_{j \in N} p_{ij} x_j$, hvis man vælger at runde π_i^k og $\hat{\pi}_i^k$ ned, hvilket vi har valgt at gøre.

2.2 Linearisering

En mulig fremgangsmåde for at udlede øvre grænser for **QK** er at formulere en linear IP-model for **QK** og derefter LP-relaksere dette problem.

2.2.1 Billionet og Calmels

Grænseværdien beskrevet i dette afsnit blev foreslået af Billionnet og Calmels [6]. I det følgende antages $p_{ij} = p_{ji}$.

De kvadratiske led i **QK** kan lineariseres ved at introducere variablen y_{ij} for hvilken:

$$y_{ij} = 1 \Leftrightarrow x_i = 1 \wedge x_j = 1$$

Denne betingelse kan modelleres ved hjælp af begrænsningerne:

$$y_{ij} \leq x_i, \quad y_{ij} \leq x_j, \quad x_j + x_i \leq 1 + y_{ij} \quad (2.7)$$

Herved fås formuleringen:

$$\text{Maksimer } \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} p_{ij} y_{ij} + \sum_{i \in N} p_{ii} x_i \quad (2.8a)$$

$$\text{mht. } \sum_{i \in N} w_i x_i \leq c \quad (2.8b)$$

$$y_{ij} \leq x_i \quad i, j \in N : i \neq j \quad (2.8c)$$

$$y_{ij} \leq x_j \quad i, j \in N : i \neq j \quad (2.8d)$$

$$x_i + x_j \leq 1 + y_{ij} \quad i, j \in N : i \neq j \quad (2.8e)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j \in N \quad (2.8f)$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad i \in N \quad (2.8g)$$

Ved at anvende at $y_{ij} = y_{ji}$ kan (2.8) omskrives til:

$$\text{Maksimer } \sum_{i, j \in N : i < j} 2p_{ij} y_{ij} + \sum_{i \in N} p_{ii} x_i \quad (2.9a)$$

$$\text{mht. } \sum_{i \in N} w_i x_i \leq c \quad (2.9b)$$

$$y_{ij} \leq x_i \quad i, j \in N : i < j \quad (2.9c)$$

$$y_{ij} \leq x_j \quad i, j \in N : i < j \quad (2.9d)$$

$$x_i + x_j \leq 1 + y_{ij} \quad i, j \in N : i < j \quad (2.9e)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j \in N : i < j \quad (2.9f)$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad i \in N \quad (2.9g)$$

Denne formulering har færre variable. Desuden ses at LP-relaksation af (2.9) giver en bedre grænseværdi end LP-relaksation af (2.8) idet (2.9) implicit indeholder den lovlige begrænsning $y_{ij} = y_{ji}$. Relakseres heltalsbegrænsningerne i (2.9) fås:

$$\text{Maksimer } \sum_{i, j \in N : i < j} 2p_{ij} y_{ij} + \sum_{i \in N} p_{ii} x_i \quad (2.10a)$$

$$\text{mht. } \sum_{i \in N} w_i x_i \leq c \quad (2.10b)$$

$$y_{ij} \leq x_i \quad i, j \in N : i < j \quad (2.10c)$$

$$y_{ij} \leq x_j \quad i, j \in N : i < j \quad (2.10d)$$

$$x_i + x_j \leq 1 + y_{ij} \quad i, j \in N : i < j \quad (2.10e)$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad i, j \in N : i < j \quad (2.10f)$$

$$x_i \in [0, 1] \quad i \in N \quad (2.10g)$$

Denne øvre grænse benævnes \mathcal{U}_{bc}^1 .

For at styrke denne formulering foreslår Billionnet og Calmels [6] at tilføje en række lovlighe uligheder. Fra (2.10b) kan man udlede ulighederne:

$$\sum_{i,j \in N: i < j} w_i y_{ij} + \sum_{i,j \in N: i > j} w_i y_{ji} \leq (c - w_j) x_j, \quad j \in N.$$

Derudover kan udledes *Chvatal-Gomory begrænsninger* udfra ulighederne i (2.10e). Disse er givet ved,

$$x_i + x_j + x_k - y_{ij} - y_{ik} - y_{jk} \leq 1, \quad i, j, k \in N : i < j < k.$$

Dette giver følgende formulering:

$$\text{Maksimer} \quad \sum_{i,j \in N: i < j} 2p_{ij} y_{ij} + \sum_{i \in N} p_{ii} x_i \quad (2.11a)$$

$$\text{mht.} \quad \sum_{i \in N} w_i x_i \leq c \quad (2.11b)$$

$$y_{ij} \leq x_i, \quad i, j \in N : i < j \quad (2.11c)$$

$$y_{ij} \leq x_j, \quad i, j \in N : i < j \quad (2.11d)$$

$$x_i + x_j \leq 1 + y_{ij}, \quad i, j \in N : i < j \quad (2.11e)$$

$$y_{ij} \geq 0, \quad i, j \in N : i < j \quad (2.11f)$$

$$x_i \in [0, 1], \quad i \in N \quad (2.11g)$$

$$\sum_{i,j \in N: i < j} w_i y_{ij} + \sum_{i,j \in N: i > j} w_i y_{ji} \leq (c - w_j) x_j, \quad j \in N \quad (2.11h)$$

$$x_i + x_j + x_k - y_{ij} - y_{ik} - y_{jk} \leq 1, \quad i, j, k \in N : i < j < k \quad (2.11i)$$

Den øvre grænse givet ved denne model betegnes U_{bc}^2 .

Implementation

Da U_{bc}^2 har $\mathcal{O}(n^3)$ begrænsninger, hvoraf mange af dem typisk er redundante, er det ikke effektivt at løse det komplette *LP*-problem. Derfor løses problemet ved trinvis at tilføje krænkede begrænsninger. Først løses problemet defineret ved begrænsningerne (2.11b), (2.11f), (2.11g) og (2.11h) med *primal-simplex*. Den fundne løsning betegnes x' . Herefter tilføjes dynamisk begrænsninger. Den af de tilbageværende begrænsning, der krænker x' mest findes og tilføjes til problemet. Det problem der herved fremkommer vil være *dualt-løsbart* og kan derfor løses med *dual-simplex* i relativt få iterationer. En begrænsning der krænker den nye løsning finde igen, indtil alle begrænsninger er overholdt med en hvis tolerance.

For en instans med $|N| = 60$ vil \mathcal{U}_{bc}^2 have ialt 41421 begrænsninger. For en instans af denne størrelse har den beskrevne algoritme fundet 5087 nødvendige begrænsninger. Dette svarer til 12.3% af det totale antal begrænsninger. Andelen af begrænsninger der tilføjes er varierende, men tallet er repræsentativt.

Til at løse de nævnt *LP-problemer* har vi anvendt *CPLEX*.

Det bør nævnes at forbedringen i objektfunktionen ofte er meget lille når de sidste mange begrænsninger tilføjes. Det kan derfor være mere fordelagtigt at stoppe beregningerne tidligere, hvis man vil opnå et bedre forhold mellem kvalitet og beregningstid. Vi har valgt ikke at gøre dette, da vi ønsker at måle grænseværdiernes absolutte styrke.

2.2.2 Caprara, Pisinger og Toth

En anden formulering undersøgt af Caprara, Pisinger og Toth [5] er givet ved.

$$\text{Maksimer } \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} p_{ij} y_{ij} + \sum_{i \in N} p_{ii} x_i \quad (2.12a)$$

$$\text{mht. } \sum_{i \in N} w_i x_i \leq c \quad (2.12b)$$

$$\sum_{i \in N \setminus \{j\}} w_i y_{ij} \leq (c - w_j) x_j \quad j \in N \quad (2.12c)$$

$$y_{ij} \leq x_j \quad i, j \in N : j \neq i \quad (2.12d)$$

$$y_{ij} = y_{ji} \quad i, j \in N : j > i \quad (2.12e)$$

$$x_j, y_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j \in N : j \neq i \quad (2.12f)$$

LP-relaksationen af denne formulering er ækvivalent med problemet defineret ved begrænsningerne (2.11b), (2.11c), (2.11d), (2.11f), (2.11g) og (2.11h) og objektfunktionen (2.11a). Fordelen ved at bruge ovenstående formulering er at den kan løses på en særlig effektiv måde.

I [5] Lagrange-relakseres begrænsningen (2.12e) og problemet LP-relakseres.

Herved fremkommer følgende Lagrange-subproblem.

$$\text{Maksimer } z(S_{cpt}(\lambda)) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus \{j\}} \hat{p}_{ij}(\lambda) y_{ij} + \sum_{i \in N} \hat{p}_{ii}(\lambda) x_i \quad (2.13a)$$

$$\text{mht. } \sum_{i \in N} w_i x_i \leq c \quad (2.13b)$$

$$\sum_{i \in N \setminus \{j\}} w_i y_{ij} \leq (c - w_j) x_j, \quad j \in N \quad (2.13c)$$

$$y_{ij} \leq x_j, \quad i, j \in N : j \neq i \quad (2.13d)$$

$$x_j, y_{ij} \in [0, 1], \quad i, j \in N : j \neq i \quad (2.13e)$$

hvor

$$\hat{p}_{ij}(\lambda) = \begin{cases} p_{ij} & \text{for } i = j \\ p_{ij} + \lambda_{ij} & \text{for } j > i \\ p_{ij} - \lambda_{ij} & \text{for } i > j \end{cases}$$

Løsningen til det Lagrange duale problem

$$z(LD_{cpt}) = \min_{\lambda \in \mathbb{M}_{n,n}} z(S_{cpt}(\lambda)) \quad (2.14)$$

er lig løsningen til LP-relaksationen til (2.12). Den øvre grænse givet ved løsningen af dette problem betegnes \mathcal{U}_{cpt}^1 .

Løsningen til det Lagrange duale problem LD_{cpt} kan da approksimeres med subgradientmetoden [7]. Vi betegner denne approksimation med $\bar{\mathcal{U}}_{cpt}^1$.

Følgende sætning fra [5] giver en effektiv metode til at løse Lagrange delproblemet $S_{cpt}(\lambda)$ givet ved (2.13).

Sætning 2.2.1 *Delproblemet $S_{cpt}(\lambda)$ givet ved (2.13) kan løses ved at løse $n + 1$ kontinuerer knapsack problemer. Dette tager totalt $\mathcal{O}(n^2)$ tid.*

For hver $j \in N$ løses:

$$\text{Maksimer } \bar{\pi}_j = \sum_{i \in N \setminus \{j\}} \hat{p}_{ij} v_{ij} \quad (2.15a)$$

$$\text{mht. } \sum_{i \in N \setminus \{j\}} w_i v_{ij} \leq (c - w_j) \quad (2.15b)$$

$$0 \leq v_{ij} \leq 1, \quad i \in N \setminus \{j\} \quad (2.15c)$$

med optimal løsning $\bar{v}_{ij}, i \in N \setminus \{j\}$.

Derefter kan $z(S_{cpt}(\lambda))$ findes ved knapsackproblemet

$$\text{Maksimer } z(S_{cpt}(\lambda)) = \sum_{j \in N} (\bar{\pi}_j + \hat{p}_{jj})x_j \quad (2.16a)$$

$$\text{mht. } \sum_{j \in N} w_j x_j \leq c \quad (2.16b)$$

$$0 \leq x_j \leq 1, \quad j \in N \quad (2.16c)$$

med optimal løsning $\bar{x}_j, j \in N$.

Den optimale løsning (x^*, y^*) til $S_{cpt}(\lambda)$ er da givet ved $y_{ij}^* = \bar{v}_{ij}\bar{x}_j$ og $x_j^* = \bar{x}_j$.

Dominansforhold

Der gælder følgende om dominansforholdet mellem \mathcal{U}_{bc}^2 og \mathcal{U}_{cpt}^1 .

Sætning 2.2.2 Vi har at $\mathcal{U}_{bc}^2 \leq \mathcal{U}_{cpt}^1$.

Bevis Som tidligere nævnt er $\mathcal{U}_{cpt}^1 = z(LD_{cpt})$ lig løsningen til LP-relaksationen af (2.12), der er givet ved:

$$\text{Maksimer } \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} p_{ij}y_{ij} + \sum_{i \in N} p_{ii}x_i \quad (2.17a)$$

$$\text{mht. } \sum_{i \in N} w_i x_i \leq c \quad (2.17b)$$

$$\sum_{i \in N \setminus \{j\}} w_i y_{ij} \leq (c - w_j)x_j \quad j \in N \quad (2.17c)$$

$$y_{ij} \leq x_j \quad i, j \in N : j \neq i \quad (2.17d)$$

$$y_{ij} = y_{ji} \quad i, j \in N : j > i \quad (2.17e)$$

$$x_j, y_{ij} \in [0, 1] \quad i, j \in N : j \neq i \quad (2.17f)$$

Vi minder desuden om at \mathcal{U}_{bc}^2 er givet ved LP-problemet (2.11). For at vise det ønskede er det tilstrækkeligt at der for enhver løsning (\bar{y}, \bar{x}) til (2.11) findes en løsning (y, x) til (2.17) med $z(y, x) = z(\bar{y}, \bar{x})$.

Givet en løsning (\bar{y}, \bar{x}) til (2.11) defineres:

$$y_{ij} = \begin{cases} \bar{y}_{ij} & \text{for } i < j \\ \bar{y}_{ji} & \text{for } i > j \end{cases}$$

og

$$x_i = \bar{x}_i \quad \text{for } i \in N$$

Den herved definerede løsning (y, x) ses nemt at overholde begrænsningerne i (2.17). Desuden gælder at,

$$\begin{aligned}
z(\bar{y}, \bar{x}) &= \sum_{i,j \in N: i < j} 2p_{ij} \bar{y}_{ij} + \sum_{i \in N} p_{ii} \bar{x}_i \\
&= \sum_{i,j \in N: i < j} p_{ij} (y_{ij} + y_{ji}) + \sum_{i \in N} p_{ii} x_i \\
&= \sum_{i,j \in N: i < j} p_{ij} y_{ij} + \sum_{i,j \in N: i > j} p_{ij} y_{ij} + \sum_{i \in N} p_{ii} x_i \\
&= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} p_{ij} y_{ij} + \sum_{i \in N} p_{ii} x_i \\
&= z(y, x)
\end{aligned}$$

Hvilket viser det ønskede. □

Følgende diskussion af forholdet mellem \mathcal{U}_{cpt}^1 og *upper planes* er baseret på [5].

Vi vil i det følgende vise at hvis $\lambda_{ij} = 0$ for $i, j \in N$ vil den øvre grænse $S_{cpt}(\lambda)$ svare til et *upper plan* som beskrevet i afsnit 2.1.

For $\lambda_{ij} = 0$ er (2.15):

$$\text{Maksimer } \bar{\pi}_j = \sum_{i \in N \setminus \{j\}} p_{ij} v_{ij} \quad (2.18a)$$

$$\text{mht. } \sum_{i \in N \setminus \{j\}} w_i v_{ij} \leq (c - w_j) \quad (2.18b)$$

$$0 \leq v_{ij} \leq 1, \quad i \in N \setminus \{j\} \quad (2.18c)$$

Vi minder om at vi i (2.5) definerede et *upper plane* $\hat{\pi}_j^3$ til,

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}_j^3 &= \max \left\{ \sum_{i \in N} p_{ij} v_i : \sum_{i \in N} v_i w_i \leq c, v_i \in [0, 1], v_j = 1 \right\} \\
&= p_{jj} + \max \left\{ \sum_{i \in N \setminus \{j\}} p_{ij} v_i : \sum_{i \in N \setminus \{j\}} v_i w_i \leq (c - w_j), v_i \in [0, 1] \right\}
\end{aligned}$$

Det gælder således at $\bar{\pi}_j = \hat{\pi}_j^3 - p_{jj}$. Indsættes dette i (2.16) fås at $S_{cpt}(\lambda = 0)$ er givet ved,

$$\text{Maksimer } z(S_{cpt}(\lambda = 0)) = \sum_{j \in N} \hat{\pi}_j^3 x_j \quad (2.19a)$$

$$\text{mht. } \sum_{j \in N} w_j x_j \leq c \quad (2.19b)$$

$$0 \leq x_j \leq 1, \quad j \in N \quad (2.19c)$$

Dette er netop LP-relaksationen af (2.2) der definerede *upper planes*. Således svarer $S_{cpt}(\lambda = 0)$ til det *upper plane* der fås ved at anvende $\hat{\pi}_j^3$ i LP-relaksationen af (2.2). Herved ses at dette *upper plane* er domineret af \mathcal{U}_{cpt}^1 .

Antag nu at de kontinuere knapsack-problemer (2.15) og (2.16) i stedet løses som heltals-knapsack. Vi kalder dette delproblem $\widehat{S}_{cpt}(\lambda)$ og definerer det tilhørende Lagrange-duale problem:

$$z(\widehat{LD}_{cpt}) = \min_{\lambda \in \mathbb{M}_{n,n}} z(\widehat{S}_{cpt}(\lambda))$$

Vi betegner denne upper bound med \mathcal{U}_{cpt}^2 . Med tilsvarende argumentation som ovenfor ses, at for $\lambda = 0$ fås at $z(\widehat{S}_{cpt}(\lambda = 0)) = \widehat{\mathcal{U}}_{ghs}^4$. Dette medfører at $\mathcal{U}_{cpt}^2 \leq \widehat{\mathcal{U}}_{ghs}^4$.

2.3 Lagrange relaxering

2.3.1 Chaillou, Hansen og Mahieu

Chaillou, Hansen og Mahieu [8] foreslår at Lagrange-relaksere kapacitetsbegrænsningen i QK. Dette giver Lagrange-subproblemet:

$$\text{Maksimer } z(S_{chm}(\lambda)) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} p_{ij} x_i x_j - \lambda \left(\sum_{j \in N} w_j x_j - c \right) \quad (2.20a)$$

$$\text{mht. } x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in N \quad (2.20b)$$

for et $\lambda \geq 0$.

Dette er et 0-1 kvadratisk problem, hvilket generelt er \mathcal{NP} -hårdt. Men da profitterne i diagonalen altid er positive kan det løses i polynomiel tid.

Chaillou, Hansen og Mahieu [8] giver en algoritme baseret på *max flow* til at løse (2.20). De konstruerer et netværk $G = (V, E)$ med $n + 2$ knuder $\{s, 1, \dots, n, t\}$ og kanterne:

$$\begin{aligned} (s, i) & \quad i \in N \\ (i, j) & \quad i, j \in N : p_{ij} \neq 0 \\ (i, t) & \quad i \in N \end{aligned}$$

Hvor kanterne har kapaciteterne

$$\begin{aligned} \bar{c}_{si} &= \max(0, \sum_{j \in N} p_{ij} - \lambda w_i) \quad i \in N \\ \bar{c}_{ij} &= p_{ij} \quad i, j \in N : p_{ij} \neq 0 \\ \bar{c}_{it} &= \max(0, \lambda w_i - \sum_{j \in N} p_{ij}) \quad i \in N \end{aligned}$$

Løsningen til *max flow* problemet på (s, t, G) betegnes med $\Psi(G)$.

Sætning 2.3.1 Løsningen til (2.20) er givet ved:

$$z(S_{chm}(\lambda)) = \lambda c + \sum_{i \in N} \bar{c}_{si} - \Psi(G)$$

Bevis Chaillou, Hansen og Mahieu beviser dette på følgende måde:

Det er velkendt at max flow er lig min cut:

$$\begin{aligned}
\Psi(G) &= \min_{x \in \{0,1\}^n} \left(\sum_{i \in N} \bar{c}_{si}(1-x_i) + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij}x_i(1-x_j) + \sum_{i \in N} \bar{c}_{it}x_i \right) \\
&= \sum_{i \in N} \bar{c}_{si} + \min_{x \in \{0,1\}^n} \left(\sum_{i \in N} (\bar{c}_{it} - \bar{c}_{si} + \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij})x_i - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij}x_ix_j \right) \\
&= \sum_{i \in N} \bar{c}_{si} + \min_{x \in \{0,1\}^n} \left(\sum_{i \in N} \left(\max(0, \lambda w_i - \sum_{j \in N} p_{ij}) - \max(0, \sum_{j \in N} p_{ij} - \lambda w_i) + \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij} \right) x_i - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij}x_ix_j \right) \\
&= \sum_{i \in N} \bar{c}_{si} + \min_{x \in \{0,1\}^n} \left(\sum_{i \in N} \left(\max(0, \lambda w_i - \sum_{j \in N} p_{ij}) + \min(0, \lambda w_i - \sum_{j \in N} p_{ij}) + \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij} \right) x_i - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij}x_ix_j \right) \\
&= \sum_{i \in N} \bar{c}_{si} + \min_{x \in \{0,1\}^n} \left(\sum_{i \in N} \left((\lambda w_i - \sum_{j \in N} p_{ij}) + \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij} \right) x_i - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij}x_ix_j \right) \\
&= \sum_{i \in N} \bar{c}_{si} + \min_{x \in \{0,1\}^n} \left(\sum_{i \in N} \left((\lambda w_i - \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij}) + \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij} \right) x_i - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij}x_ix_j \right) \\
&= \sum_{i \in N} \bar{c}_{si} + \min_{x \in \{0,1\}^n} \left(\sum_{i \in N} \lambda w_i x_i - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij}x_ix_j \right) \\
&= \sum_{i \in N} \bar{c}_{si} - z(S_{chm}(\lambda)) + \lambda c
\end{aligned}$$

Den sidste lighed giver det ønskede.

□

Løsningen til det Lagrangeduale-problem

$$z(LD_{chm}) = \min_{\lambda \geq 0} z(S_{chm}(\lambda)) \quad (2.21)$$

giver den øvre grænse \mathcal{U}_{chm}^1 .

Som det er velkendt (fx fra side 173 i [7]) er Lagrange subproblemet $z(S_{chm}(\lambda))$ som funktion af λ stykvis linear og konveks. Chaillou, Hansen og Mahieu viser at denne funktion består af højst n segmenter. Chaillou, Hansen og Mahieu brugte følgende algoritme til at løse det Lagrange-duale problem.

1. Find de to yderste linjestykker af Lagrange subproblemet som funktion af λ . Det vil sige linjestykket l_1 med mindst hældning og linjestykket l_2 med størst hældning. Det er ikke nødvendigt at kende enderne for linjestykkerne, da vi blot vil kigge på dem som linjer. I det følgende vil l_1 altid ligge til venstre for det optimale λ og l_2 vil ligge til højre for det optimale λ og begge linjestykker vil være en del af grafen. l_1 vil derfor have negativ hældning og l_2 positiv.
2. Find skæringspunktet (λ, y) mellem linjerne som linjestykkerne l_1 og l_2 er en del af.

3. Beregn $z(S_{chm}(\lambda))$ ved hjælp af max flow og find linjestykket l_3 som $(\lambda, z(S_{chm}(\lambda)))$ ligger på.
4. Hvis l_3 er lig l_1 eller l_2 må l_1 og l_2 skære hinanden, og vi har dermed fundet løsningen til (2.21).
5. Ellers er l_3 et nyt linjestykke. Hvis l_3 har positiv hældning ligger det til højre for optimum og vi sætter derfor $l_2 = l_3$. Hvis l_3 har negativ hældning ligger det til venstre for optimum og vi sætter $l_1 = l_3$. Herefter fortsætter vi til punkt 2.

Ovenstående algoritme bruger $\mathcal{O}(n)$ skridt, da vi aldrig kigger på den samme kant to gange, og der højst var n kanter. Hvis man bruger Karzanovs algoritme eller *three Indians*, som begge tager $\mathcal{O}(V^3)$ tid, til at løse flowproblemet, kan \mathcal{U}_{chm}^1 altså beregnes i $\mathcal{O}(n^4)$ tid. Gallo, Grigoriadis og Tarjan[10] er kommet med en max flow-algoritme, der vil nedsætte tidsforbruget til $\mathcal{O}(n^3)$.

Implementation

Vi har valgt ikke at bruge algoritmen af Gallo, Grigoriadis og Tarjan, men at bruge CPLEX til at løse flowet for at begrænse projektets omfang.

Chaillou, Hansen og Mahieu har ikke skrevet hvordan de finder linjestykket ud fra et givet λ . Vi valgt at finde det ved at løse flowet igen for $\lambda + \epsilon$, hvor ϵ er et passende lille tal. Herved kan hældningen af linien findes og linien bestemmes.

2.4 Lagrange decomposition

2.4.1 Michelon og Veilleux

Michelon og Veilleux [9] kigger på den ækvivalente formulering af **QK**, som fremkommer ved at indføre kopivariablene y_i som er lig x_i :

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maksimer} & \sum_{i \in N} p_{ii} x_i + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} p_{ij} x_i x_j \\
 \text{mht.} & \sum_{i \in N} w_i y_i \leq c \\
 & x_i = y_i \quad i \in N \\
 & x_i, y_i \in \{0, 1\} \quad i \in N
 \end{array} \tag{2.22}$$

De lagrangedualiserer $x_i = y_i$ begrænsningerne, og får dermed:

$$\begin{aligned}
\text{Maksimer } z(S_{mv}(\lambda)) &= \sum_{i \in N} p_{ii} x_i + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} p_{ij} x_i x_j - \sum_{i \in N} \lambda_i (x_i - y_i) \\
\text{mht. } \sum_{i \in N} w_i y_i &\leq c \\
x_i, y_i &\in \{0, 1\} \quad i \in N
\end{aligned} \tag{2.23}$$

som giver grænseværdien \mathcal{U}_{mv}^1 . Dette IP-problem kan splittes op i to IP-problemer:

$$\begin{aligned}
\text{Maksimer } K(\lambda) &= \sum_{i \in N} (p_{ii} - \lambda_i) x_i + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} p_{ij} x_i x_j \\
x_i &\in \{0, 1\} \quad i \in N
\end{aligned} \tag{2.24}$$

som er et 0-1 kvadratisk problem og

$$\begin{aligned}
\text{Maksimer } \sum_{i \in N} \lambda_i y_i \\
\text{mht. } \sum_{i \in N} w_i y_i &\leq c \\
y_i &\in \{0, 1\} \quad i \in N
\end{aligned} \tag{2.25}$$

som er et 0-1 knapsack-problem. Michelon og Veilleux nævner men beviser ikke, at det 0-1 kvadratiske problem (2.24), kan løses med en max-flow algoritme på en tilsvarende måde, som den Chaillou, Hansen og Mahieu brugte. Dette skyldes at elementerne uden for diagonalen er positive.

Vi konstruerer netværket $G = (V, E, \lambda)$ med knuderne $V = \{s, 1, \dots, n, t\}$ og kanterne $E = \{(s, i) | i \in N\} \cup \{(i, j) | i, j \in N\} \cup \{(i, t) | t \in N\}$ som har følgende kapaciteter:

$$\bar{c}_{si} = \max\{0, \sum_{j \in N} p_{ij} - \lambda_i\} \quad \bar{c}_{ij} = p_{ij} \quad \bar{c}_{it} = \max\{0, \lambda_i - \sum_{j \in N} p_{ij}\}$$

Sætning 2.4.1 $K(\lambda) = \sum_{i \in N} c_{si} - \Psi(G)$, hvor $\Psi(G)$ er max flow i G .

Bevis Som før udnytter vi at max flow er lig min cut:

$$\begin{aligned}
\Psi(G) &= \min_{x \in \{0,1\}^n} \left(\sum_{i \in N} \bar{c}_{si}(1-x_i) + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij}x_i(1-x_j) + \sum_{i \in N} \bar{c}_{it}x_i \right) \\
&= \sum_{i \in N} \bar{c}_{si} + \min_{x \in \{0,1\}^n} \left(\sum_{i \in N} (\bar{c}_{it} - \bar{c}_{si} + \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij})x_i - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij}x_ix_j \right) \\
&= \sum_{i \in N} \bar{c}_{si} + \min_{x \in \{0,1\}^n} \left(\sum_{i \in N} \left(\max(0, \lambda_i - \sum_{j \in N} p_{ij}) - \max(0, \sum_{j \in N} p_{ij} - \lambda_i) + \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij} \right) x_i - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij}x_ix_j \right) \\
&= \sum_{i \in N} \bar{c}_{si} + \min_{x \in \{0,1\}^n} \left(\sum_{i \in N} \left(\max(0, \lambda_i - \sum_{j \in N} p_{ij}) + \min(0, \lambda_i - \sum_{j \in N} p_{ij}) + \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij} \right) x_i - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij}x_ix_j \right) \\
&= \sum_{i \in N} \bar{c}_{si} + \min_{x \in \{0,1\}^n} \left(\sum_{i \in N} \left((\lambda_i - \sum_{j \in N} p_{ij}) + \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij} \right) x_i - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij}x_ix_j \right) \\
&= \sum_{i \in N} \bar{c}_{si} + \min_{x \in \{0,1\}^n} \left(\sum_{i \in N} \left(\lambda_i - \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij} + \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij} \right) x_i - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij}x_ix_j \right) \\
&= \sum_{i \in N} \bar{c}_{si} + \min_{x \in \{0,1\}^n} \left(\sum_{i \in N} \lambda_i x_i - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \bar{c}_{ij}x_ix_j \right) \\
&= \sum_{i \in N} \bar{c}_{si} - K(\lambda)
\end{aligned}$$

Den sidste lighed giver det ønskede. □

Sætning 2.4.2 Givet det bedste lambda λ' fra Chaillou, Hansen og Mahieu, dvs.

$$z(S_{chm}(\lambda')) = \min_{\lambda \geq 0} z(S_{chm}(\lambda))$$

da vil

$$z(S_{mv}(\bar{\lambda}')) \leq z(S_{chm}(\lambda')) \quad \text{for } \bar{\lambda}' = (w_1\lambda', w_2\lambda', \dots, w_n\lambda')$$

Bevis For enhver lovlig løsning (x, y) til $z(S_{mv}(\bar{\lambda}'))$ har vi for den lovlige løsning x til $z(S_{chm}(\lambda'))$.

$$\begin{aligned}
& z(S_{chm}(\lambda')) - z(S_{mv}(\bar{\lambda}')) \\
&= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} p_{ij}x_ix_j - \lambda' \left(\sum_{j \in N} w_j x_j - c \right) - \left(\sum_{i \in N} p_{ii}x_i + \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} p_{ij}x_ix_j - \sum_{i \in N} w_i \lambda' (x_i - y_i) \right) \\
&= - \sum_{j \in N} w_j x_j \lambda' + c \lambda' + \sum_{i \in N} w_i \lambda' x_i - \sum_{i \in N} w_i \lambda' y_i \\
&= \lambda' \left(c - \sum_{i \in N} w_i y_i \right)
\end{aligned}$$

Da $S_{mv}(\lambda)$ har begrænsningen $\sum_{i \in N} w_i y_i \leq c$ er $\lambda'(c - \sum_{i \in N} w_i y_i) \geq 0$. For enhver lovlig løsning til $z(S_{mv}(\bar{\lambda}'))$ vil den tilsvarende løsning til $z(S_{chm}(\lambda'))$ altså være lovlig og give en større objektfunktion. Da vi maksimerer over alle lovlige løsninger giver $z(S_{chm}(\lambda'))$ altså en højere værdi end $z(S_{mv}(\bar{\lambda}'))$.

□

Korrolar 2.4.3 $\mathcal{U}_{mv}^1 \leq \mathcal{U}_{chm}^1$

Bevis Følger direkte af sætning 2.4.2.

□

Michelon og Veilleux brugte heuristikker til at få en øvre grænse for \mathcal{U}_{mv}^1 .

Vi har valgt at approksimere \mathcal{U}_{mv}^1 med subgradientmetoden. Denne approksimation kalder vi $\bar{\mathcal{U}}_{mv}^1$. Vi starter med $\lambda = \bar{\lambda}'$, da det er en hurtig måde at få en god startværdi på.

2.4.2 Billionet, Faye, Soutif

I denne grænseværdi anvender Billionet, Faye og Soutif [4] Lagrange dekomposition til at opsplitte problemet i m uafhængige delproblemer. Hver delproblem løses da ved udtømmende søgning blandt en delmængde af de variable der indgår. Herved kan delproblemet løses ved at løse en række knapsackproblemer.

Vi vil anvende følgende definitioner:

- Lad $\{I_1, \dots, I_m\}$ være en klassedeling af indexmængden N . D.v.s $\cup_{k=1}^m I_k = N$ og $I_i \cap I_j = \emptyset$ for $i \neq j$.
- Lad $\text{set}(i)$ være det $k \in \{1, \dots, m\}$ således at $i \in I_k$
- X_S er mængden af variable x_i med $i \in S$.

Lad funktionen $f_k(x_{I_k}, x_{N \setminus I_k})$ være givet ved:

$$f_k(x_{I_k}, x_{N \setminus I_k}) = \sum_{i \in I_k} \sum_{j \in I_k} p_{ij} x_i x_j + \sum_{i \in I_k} \sum_{j \in N \setminus I_k} p_{ij} x_i x_j$$

Da ses at

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m f_k(x_{I_k}, x_{N \setminus I_k}) &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i \in I_k} \sum_{j \in I_k} p_{ij} x_i x_j + \sum_{i \in I_k} \sum_{j \in N \setminus I_k} p_{ij} x_i x_j \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{i \in I_k} \left(\sum_{j \in I_k} p_{ij} x_i x_j + \sum_{j \in N \setminus I_k} p_{ij} x_i x_j \right) \\ &= \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} p_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

Hvor højresiden er objektfunktionen for **QK**. Bemærk at hvis variabelen x_{I_k} holdes konstant, da er f_k linear i de tilbageværende frie variable. Der anvendes nu Lagrange dekomposition til at opspalte problemet i uafhængige subproblemer. Der introduceres kopivariable y_j^k således at

$$y_j^k = x_k \quad k \in \{1 \dots m\}, j \in N \setminus I_k$$

Desuden erstattes kapacitetsbegrænsningen med m kopier af kapacitetsbegrænsningen (hvoraf $m - 1$ er redundante) og kopivariablene introduceres i disse. Der tilføjes også redundante begrænsninger på formen $x_i y_j^{\text{set}(i)} = x_j y_i^{\text{set}(j)}$.

Herved fås følgende formulering af **QK**

$$\text{Maksimer} \quad \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i \in I_k} \sum_{j \in I_k} p_{ij} x_i x_j + \sum_{i \in I_k} \sum_{j \in N \setminus I_k} p_{ij} x_i y_j^k \right) \quad (2.26a)$$

$$\text{mht.} \quad y_j^k = x_j, \quad k \in \{1, \dots, m\}, \quad j \in N \setminus I_k \quad (2.26b)$$

$$x_i y_j^{\text{set}(i)} = x_j y_i^{\text{set}(j)}, \quad i \in N, j \in N, \text{set}(i) \neq \text{set}(j) \quad (2.26c)$$

$$\sum_{i \in I_k} w_i x_i + \sum_{j \in N \setminus I_k} w_j y_j^k \leq c, \quad k \in \{1, \dots, m\} \quad (2.26d)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in N \quad (2.26e)$$

$$y_j^k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \dots, m, j \in N \setminus I_k \quad (2.26f)$$

Lagrangerelakseres (2.26b) og (2.26c) med lagrange variable henholdsvis $\lambda_j^k \in \mathbb{R}$ og $\mu_{ij} \in \mathbb{R}$ fås

$$\text{Maksimer} \quad \sum_{k=1}^m \sum_{i \in I_k} \sum_{j \in I_k} p_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^m \sum_{i \in I_k} \sum_{j \in N \setminus I_k} p_{ij} x_i y_j^k + \quad (2.27a)$$

$$+ \sum_{k=1}^m \sum_{j \in N \setminus I_k} \lambda_j^k (x_j - y_j^k) + \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ \text{set}(j) \neq \text{set}(i)}} \mu_{ij} (x_i y_j^{\text{set}(i)} - x_j y_i^{\text{set}(j)}) \quad (2.27b)$$

$$\text{mht.} \quad \sum_{i \in I_k} w_i x_i + \sum_{j \in N \setminus I_k} w_j y_j^k \leq c, \quad k \in \{1, \dots, m\} \quad (2.27c)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in N \quad (2.27d)$$

$$y_j^k \in [0, 1], \quad k = 1, \dots, m, j \in N \setminus I_k \quad (2.27e)$$

Her er også grænserne på variablene y_j^k relaxeret.

Da

$$\sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ \text{set}(j) \neq \text{set}(i)}} \mu_{ij} (x_i y_j^{\text{set}(i)} - x_j y_i^{\text{set}(j)}) = \sum_{k=1}^m \sum_{i \in I_k} \sum_{j \in N \setminus I_k} \mu_{ij} x_i y_j^k - \sum_{k=1}^m \sum_{i \in I_k} \sum_{j \in N \setminus I_k} \mu_{ji} x_i y_j^k$$

og

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j \in N \setminus I_k} \lambda_j^k x_j = \sum_{i \in N} \left(\sum_{h \neq \text{set}(i)} \lambda_i^h \right) x_i = \sum_{k=1}^m \sum_{i \in I_k} \left(\sum_{h \neq k} \lambda_i^h \right) x_i$$

kan (2.27) løses ved at løse de m uafhængige delproblemer $L_k(I_k, \lambda, \mu)$, $k = 1, \dots, m$ givet ved:

$$\text{Maksimer } z(L_k(I_k, \lambda, \mu)) = \sum_{i \in I_k} \sum_{j \in I_k} p_{ij} x_i x_j + \sum_{i \in I_k} \sum_{j \in N \setminus I_k} p_{ij} x_i y_j^k \quad (2.28a)$$

$$+ \sum_{i \in I_k} \left(\sum_{h \neq k} \lambda_i^h \right) x_i - \sum_{j \in N \setminus I_k} \lambda_j^k y_j^k + \sum_{i \in I_k} \sum_{j \in N \setminus I_k} (\mu_{ij} - \mu_{ji}) x_i y_j^k \quad (2.28b)$$

$$\text{mht. } \sum_{i \in I_k} w_i x_i + \sum_{j \in N \setminus I_k} w_j y_j^k \leq c \quad (2.28c)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in N \quad (2.28d)$$

$$y_j^k \in [0, 1], \quad j \in N \setminus I_k \quad (2.28e)$$

Dette kan omskrives til:

$$\text{Maksimer } z(L_k(I_k, \lambda, \mu)) = \text{const} + \sum_{j \in N \setminus I_k} \left(\sum_{I_k} p_i x_i \right) y_j^k \quad (2.29a)$$

$$- \sum_{j \in N \setminus I_k} \lambda_j^k y_j^k + \sum_{j \in N \setminus I_k} \left(\sum_{i \in I_k} (\mu_{ij} - \mu_{ji}) x_i \right) y_j^k \quad (2.29b)$$

$$\text{mht. } \sum_{i \in I_k} w_i x_i + \sum_{j \in N \setminus I_k} w_j y_j^k \leq c \quad (2.29c)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in N \quad (2.29d)$$

$$y_j^k \in [0, 1], \quad j \in N \setminus I_k \quad (2.29e)$$

hvor $\text{const} = \sum_{i \in I_k} \sum_{j \in I_k} p_{ij} x_i x_j + \sum_{i \in I_k} \left(\sum_{h \neq k} \lambda_i^h \right) x_i$. Antages nu variablene x_{I_k} holdes konstant, da er ledet const konstant. Desuden ses at hvis vi definerer

$$\tilde{P}_j = \sum_{i \in I_k} p_{ij} x_i - \lambda_j^k + \sum_{i \in I_k} (\mu_{ij} - \mu_{ji}) x_i$$

kan man omskrive $L_k(I_k, \lambda, \mu)$ til et problem på formen:

$$\text{Maksimer } z(L_k(I_k, \lambda, \mu)) = \text{const} + \sum_{j \in N \setminus I_k} \tilde{P}_j y_j^k \quad (2.30a)$$

$$\text{mht. } \sum_{j \in N \setminus I_k} w_j y_j^k \leq c - \sum_{i \in I_k} w_i x_i \quad (2.30b)$$

$$y_j^k \in [0, 1] \quad j \in N \setminus I_k \quad (2.30c)$$

Problemet (2.30) løses for samtlige tildelinger af X_{I_k} fra $\{0, 1\}^{|I_k|}$. For en fast værdi af X_{I_k} er (2.30) et kontinuert knapsackproblem. Definer $z(L'_k(I_k, \lambda, \mu))$ til at være den største løsning fra disse $2^{|I_k|}$ knapsackproblemer.

Således fås at løsningen til (2.27) er

$$\sum_{m=1}^k z(L'_k(I_k, \lambda, \mu))$$

Det Lagrange duale problem er givet ved:

$$\min_{\lambda, \mu} \sum_{m=1}^k z(L'_k(I_k, \lambda, \mu))$$

Dette kan tilnærmes ved hjælp af subgradientmetoden. Grænseværdien opnået herved betegnes \bar{U}_{bfs}^1 .

Antag at $I_k, k = 1, \dots, m$ vælges således at samtlige I_k er af samme størrelse. Altså er $|I_k| = \frac{n}{m}$, hvor $n = |N|$. Køretiden for at beregne Lagrange delproblemet L'_k er $\mathcal{O}(nm2^{n/m})$. Dette ses nemt da der for hver af de m delproblemer $L'_k(I_k, \lambda, \mu)$ skal løses $2^{|I_k|} = 2^{n/m}$ lineare knapsackproblemer. Hver af disse knapsackproblemer tager $\mathcal{O}(n)$ tid hvilket giver $\mathcal{O}(nm2^{n/m})$ totalt. Bemærk at grænsens kvalitet er bedre med færre delproblemer m , men at køretiden stiger eksponentielt med $1/m$. Billionet, Faye og Soutif [4] foreslår at vælge m således at $n/m = 5$, hvilket vi også har anvendt.

Implementation

Som nævnt tilnærmes løsningen til det Lagrange duale problem med subgradientmetoden som beskrevet i afsnit 1.3. For $|I_k| = 5$ er antallet af Lagrangevariable $m(n - 5) + n(n - 5) = \mathcal{O}(n^2)$.

Lad

$$\Delta \lambda_j^k = x_j - y_j^k, \quad k \in \{1 \dots m\}, \quad j \in N \setminus I_k$$

og

$$\Delta \mu_{ij} = (x_i y_j^{\text{set}(i)} - x_j y_i^{\text{set}(j)}), \quad i \in N, j \in N, \text{set}(i) \neq \text{set}(j)$$

Da er subradienten anvendt ved opdatering af (λ, μ) givet ved $(\Delta \lambda, \Delta \mu)$.

2.5 Grænseværdier baseret på SDP

Dette afsnit er baseret på [16] og [15].

En matrix $A \in \mathbb{M}_{n,n}$ er *positiv semidefinit (PSD)* hvis:

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : y^T A y \geq 0$$

og vi anvender notationen $A \succeq 0$ hvis A er *PSD*. I det følgende vil alle *PSD* matrixer også være symmetriske.

Det ses nemt at $A \succeq 0 \Rightarrow A_{ii} \geq 0$ for $i \in N$. Desuden gælder det at en 1×1 matrix A er *PSD* hvis og kun hvis $A_{11} \geq 0$.

For en *blokdiagonalmatrix* gælder at,

$$\begin{pmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X_k \end{pmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow X_1 \succeq 0, \dots, X_k \succeq 0$$

I dette afsnit præsenteres grænseværdier baseret på semidefinit programmering (**SDP**). D.v.s grænseværdier givet ved et problem på formen

$$\text{Maksimer } \langle P, X \rangle \quad (2.31a)$$

$$\text{mht. } \langle A_i, X \rangle = b_i \quad i = 1 \dots m \quad (2.31b)$$

$$X \succeq 0 \quad (2.31c)$$

hvor $P, A_i \in \mathbb{M}_{n,n}$, $b_i \in \mathbb{R}$.

Det kan vises at:

Sætning 2.5.1 [18] *Følgende egenskaber er ækvivalente for $X \in \mathbb{M}_{n,n}$:*

1. $X \succeq 0$ og $\text{rank}(X) = 1$

2. $\exists x \in \mathbb{R}^n : X = x x^T$.

Den oprindelige formulering af **QK** kan skrives

$$\text{Maksimer } \langle P, x x^T \rangle \quad (2.32a)$$

$$\text{mht. } w x \leq c \quad (2.32b)$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad (2.32c)$$

Ved hjælp af sætning 2.5.1 ses at der findes den ækvivalente formulering:

$$\text{Maksimer } \langle P, X \rangle \quad (2.33a)$$

$$\text{mht. } \langle \text{Diag}(w), X \rangle \leq c \quad (2.33b)$$

$$X \succeq 0 \quad (2.33c)$$

$$\text{rank}(X) = 1 \quad (2.33d)$$

$$X_{ii} \in \{0, 1\} \quad (2.33e)$$

Dette ses ved at bemærke at der ifølge sætning 2.5.1 findes en bijektion mellem løsningerne til (2.33) og (2.32) og at hver par af løsninger har samme objektværdi. Ved at fjerne begrænsningen (2.33d) og relaksere (2.33e) fås nedenstående grænseværdi, der benævnes \mathcal{U}_{hrw}^1 .

$$\text{Maksimer } \langle P, X \rangle \quad (2.34a)$$

$$\text{mht. } \langle \text{Diag}(w), X \rangle \leq c \quad (2.34b)$$

$$X \succeq 0 \quad (2.34c)$$

$$X_{ii} \leq 1 \quad (2.34d)$$

Bemærk at begrænsningerne $X_{ii} \geq 0$ er fjernet da de følger af $X \succeq 0$.

Den følgende sætning giver en lovlig ulighed for (2.33).

Sætning 2.5.2 [18] Hvis $X \succeq 0$, $X_{ii} \in \{0, 1\}$ og $\text{rank}(X) = 1$ så gælder at $X - \text{diag}(X)\text{diag}(X)^T \succeq 0$.

Tilføjes denne begrænsning til (2.33) fås

$$\text{Maksimer } \langle P, X \rangle \quad (2.35a)$$

$$\text{mht. } \langle \text{Diag}(w), X \rangle \leq c \quad (2.35b)$$

$$X \succeq 0 \quad (2.35c)$$

$$\text{rank}(X) = 1 \quad (2.35d)$$

$$X - \text{diag}(X)\text{diag}(X)^T \succeq 0 \quad (2.35e)$$

$$X_{ii} \in \{0, 1\} \quad (2.35f)$$

Fjernes (2.35c) og (2.35d) og relakseres (2.35f) fås den øvre grænse

$$\text{Maksimer } \langle P, X \rangle \quad (2.36a)$$

$$\text{mht. } \langle \text{Diag}(w), X \rangle \leq c \quad (2.36b)$$

$$X - \text{diag}(X)\text{diag}(X)^T \succeq 0 \quad (2.36c)$$

$$0 \leq X_{ii} \leq 1 \quad (2.36d)$$

For at skrive dette som et **SDP** anvendes at:

Sætning 2.5.3 [18]

$$X - \text{diag}(X)\text{diag}(X)^T \succeq 0 \Leftrightarrow X' \succeq 0$$

hvor

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & \text{diag}(X)^T \\ \text{diag}(X) & X \end{pmatrix}.$$

Således kan (2.36) skrives

$$\text{Maksimer } \langle P, X \rangle \quad (2.37a)$$

$$\text{mht. } \langle \text{Diag}(w), X \rangle \leq c \quad (2.37b)$$

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & \text{diag}(X)^T \\ \text{diag}(X) & X \end{pmatrix} \quad (2.37c)$$

$$X' \succeq 0 \quad (2.37d)$$

$$X_{ii} \leq 1 \quad (2.37e)$$

Bemærk at begrænsningerne $X_{ii} \geq 0$ er fjernet da de følger af $X' \succeq 0$. Ovenstående kan let skrives som et **SDP** ved at formulere (2.37c) som en række begrænsninger på formen $\langle A_i, X \rangle = b_i$. Vi betegner grænseværdien givet ved (2.37) med U_{hrw}^2 .

Betragt nu igen formuleringen (2.33). Ifølge sætning 2.5.1 findes x således at $X = xx^T$. Begrænsningen (2.33b) kan da omskrives til

$$\langle \text{Diag}(w), X \rangle \leq c \Leftrightarrow \langle \text{Diag}(w), xx^T \rangle \leq c \Leftrightarrow x^T w \leq c$$

Det gælder at:

$$x^T w \leq c \Leftrightarrow (x^T w)^2 \leq c^2 \Leftrightarrow (w^T x)(x^T w) \leq c^2 \Leftrightarrow \langle ww^T, xx^T \rangle \leq c^2 \Leftrightarrow \langle ww^T, X \rangle \leq c^2$$

Dette giver formuleringen

$$\text{Maksimer } \langle P, X \rangle \quad (2.38a)$$

$$\text{mht. } \langle ww^T, X \rangle \leq c^2 \quad (2.38b)$$

$$X \succeq 0 \quad (2.38c)$$

$$\text{rank}(X) = 1 \quad (2.38d)$$

$$X_{ii} \in \{0, 1\} \quad (2.38e)$$

Man kan da relaksere som tidligere hvilket giver grænseværdien

$$\text{Maksimer } \langle P, X \rangle \quad (2.39a)$$

$$\text{mht. } \langle ww^T, X \rangle \leq c^2 \quad (2.39b)$$

$$X - \text{diag}(X)\text{diag}(X)^T \succeq 0 \quad (2.39c)$$

$$X_{ii} \leq 1 \quad (2.39d)$$

der betegnes \mathcal{U}_{hrw}^3 .

Den næste relaxsation omformulerer også begrænsning (2.33b).

Da $w^T x \geq 0$ gælder at:

$$w^T x \leq c \Leftrightarrow (w^T x)^2 \leq w^T x c$$

Dette er ensbetydende med at

$$\begin{aligned} 0 \leq w^T x (c - x^T w) &= w^T x (1 \ x^T) \begin{pmatrix} c \\ -w \end{pmatrix} = \\ (0 \ w^T) \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} (1 \ x^T) \begin{pmatrix} c \\ -w \end{pmatrix} &= \left\langle \begin{pmatrix} c \\ -w \end{pmatrix} (0 \ w^T), \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} (1 \ x^T) \right\rangle \end{aligned} \quad (2.40)$$

Bemærk nu at da $X = xx^T$ og $\text{diag}(xx^T) = x$ så er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} (1 \ x^T) = \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & xx^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{diag}(xx^T)^T \\ \text{diag}(xx^T) & xx^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{diag}(X)^T \\ \text{diag}(X) & X \end{pmatrix} = X'$$

Indsættes dette i (2.40) fås at

$$\left\langle \begin{pmatrix} c \\ -w \end{pmatrix} (0 \ w^T), X' \right\rangle \geq 0$$

altså er følgende en formulering af **QK**

$$\text{Maksimer } \langle P, X \rangle \quad (2.41a)$$

$$\text{mht. } \left\langle \begin{pmatrix} c \\ -w \end{pmatrix} (0 \ w^T), X' \right\rangle \geq 0 \quad (2.41b)$$

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & \text{diag}(X)^T \\ \text{diag}(X) & X \end{pmatrix} \quad (2.41c)$$

$$X \succeq 0 \quad (2.41d)$$

$$\text{rank}(X) = 1 \quad (2.41e)$$

$$X_{ii} \in \{0, 1\} \quad (2.41f)$$

Ved at anvende sætning 2.5.2 og relaxsere som tidligere fås grænseværdien \mathcal{U}_{hrw}^4 :

$$\text{Maksimer } \langle P, X \rangle \quad (2.42a)$$

$$\text{mht. } \left\langle \begin{pmatrix} c \\ -w \end{pmatrix} (0 \ w^T), X' \right\rangle \geq 0 \quad (2.42b)$$

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & \text{diag}(X)^T \\ \text{diag}(X) & X \end{pmatrix} \quad (2.42c)$$

$$X - \text{diag}(X)\text{diag}(X)^T \succeq 0 \quad (2.42d)$$

$$X_{ii} \leq 1 \quad (2.42e)$$

Hvor vi bemærker at (2.42d) er ækvivalent med $X' \succeq 0$.

Ved at gange kapacitetsbegrænsningen i **QK** med x_i fås den lovlige ulighed

$$\sum_{j \in N} w_j x_i x_j \leq x_i c \quad \text{for } i \in N$$

erstattes $x_i x_j$ med X_{ij} og x_i med X_{ii} fremkommer ulighederne

$$\sum_{j \in N} w_j X_{ij} \leq X_{ii} c \quad \text{for } i \in N$$

hvilket giver relaksationen \mathcal{U}_{hrw}^5

$$\text{Maksimer } \langle P, X \rangle \quad (2.43a)$$

$$\sum_{j \in N} w_j X_{ij} \leq X_{ii} c \quad \text{for } i \in N \quad (2.43b)$$

$$X - \text{diag}(X) \text{diag}(X)^T \succeq 0 \quad (2.43c)$$

$$X_{ii} \leq 1 \quad (2.43d)$$

Forholdet mellem disse grænseværdier er givet ved følgende sætning:

Sætning 2.5.4 [15] *Det gælder at:*

$$\mathcal{U}_{hrw}^5 \leq \mathcal{U}_{hrw}^4 \leq \mathcal{U}_{hrw}^3 \leq \mathcal{U}_{hrw}^2 \leq \mathcal{U}_{hrw}^1$$

2.5.1 Implementation

Ovenstående **SDP** problemer har vi løst med softwarepakken *SeDuMi 1.05* [11] til Matlab. Ifølge benchmarks [12] er *SeDuMi* ikke den hurtigste **SDP** løser der er til rådighed. Vi formoder dog at beregningstiden er repræsentativ.

SeDuMi løser problemer på formen:

$$\text{Maksimer } \langle P, X \rangle \quad (2.44a)$$

$$\text{mht. } \langle A_i, X \rangle = b_i \quad i = 1 \dots m \quad (2.44b)$$

$$X \succeq 0 \quad (2.44c)$$

Hvor A_i for $i = 1, \dots, m$ er symmetrisk. Man kan nemt håndtere begrænsninger af typen (2.44b) med ulighed i stedet for lighed ved at tilføje *slack-variable*. f.eks. kan

$$\text{Maksimer } \langle P, X \rangle \quad (2.45a)$$

$$\text{mht. } \langle A, X \rangle \leq b \quad (2.45b)$$

$$X \succeq 0 \quad (2.45c)$$

skrives

$$\text{Maksimer } \langle \bar{P}, \bar{X} \rangle \quad (2.46a)$$

$$\text{mht. } \langle \bar{A}, \bar{X} \rangle = b \quad (2.46b)$$

$$\bar{X} \succeq 0 \quad (2.46c)$$

hvor

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{P} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I det følgende beskrives hvordan \mathcal{U}_{hrw}^5 omskrives til den nødvendige form. Vi minder om at \mathcal{U}_{hrw}^5 er givet ved:

$$\text{Maksimer } \langle P, X \rangle \quad (2.47a)$$

$$\sum_{j \in N} w_j X_{ij} \leq X_{ii} c \quad \text{for } i \in N \quad (2.47b)$$

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & \text{diag}(X)^T \\ \text{diag}(X) & X \end{pmatrix} \quad (2.47c)$$

$$X' \succeq 0 \quad (2.47d)$$

$$X_{ii} \leq 1 \quad (2.47e)$$

Begrænsningen $X' = \begin{pmatrix} 1 & \text{diag}(X)^T \\ \text{diag}(X) & X \end{pmatrix}$ kan modelleres ved $n + 1$ begrænsninger,

$$\begin{aligned} \langle A_1^1, X' \rangle &= b_1^1 \\ &\vdots \\ \langle A_{n+1}^1, X' \rangle &= b_{n+1}^1 \end{aligned}$$

hvor

$$(A_1^1)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j = 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad b_1^1 = 1$$

og for $k = 2, \dots, n + 1$:

$$(A_k^1)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = 1, j = k \text{ eller } j = 1, i = k \\ -2 & \text{for } i = j = k \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad b_k^1 = 0$$

Ligeledes kan begrænsningerne $\sum_{j \in N} w_j X_{ij} \leq X_{ii}c$ for $i \in N$ modelleres ved n begrænsninger:

$$\begin{aligned} \langle A_1^2, X' \rangle &\leq 0 \\ &\vdots \\ \langle A_n^2, X' \rangle &\leq 0 \end{aligned}$$

hvor for $i = 1, \dots, n$,

$$A_i^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{i-1}/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_1/2 & \dots & w_{i-1}/2 & w_i - c & w_{i+1}/2 & \dots & w_n/2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{i+1}/2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_n/2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

De tilbageværende begrænsninger $X_{ii} \leq 1$ for $i = 1, \dots, n$ kan skrives som n matrixbegrænsninger. Der skal således ialt bruges $3n + 1$ begrænsninger for at skrive \mathcal{U}_{hrw}^5 på den ønskede form (2.44).

På tilsvarende måde kan omskrivninger foretages for de andre grænseværdier.

Kapitel 3

Numerisk test

I dette kapitel diskuterer vi resultaterne af testkørsel på en række genererede instanser af **QK**.

3.1 Testinstanser

Da vi ikke havde adgang til nogen testinstanser fra en anvendelse af **QK**, har vi valgt at bruge de testinstanser som traditionelt er brugt i artikler der beskriver øvre grænser for **QK**. En instans af størrelse n og med densitet Δ laves på følgende måde:

Elementerne i profitmatrixen p vælges med sandsynlighed Δ som et tilfældigt heltal mellem 1 og 100 og er ellers 0. Nogle gange har man sat $p_{ij} = p_{ji}$, hvilket vi har valgt, da alle instanser kan skrives op på denne måde, og nogle af grænserværdierne antager dette. Vægtene w_i vælges som heltal mellem 1 og 50. Kapaciteten c sættes til et tilfældigt heltal i intervallet $[50, \sum_i^n w_i]$.

Vores testinstanser er lavet med testinstansgeneratoren fra [17].

Resultaterne af vores test er afhængig af den fordeling vi har valgt for vores testdata. Man må stille sig det spørgsmål om dette er en rimelig fordeling at teste på. Vi har prøvet med instanser, hvor hvert element svarede til et punkt i en firkant, og profitten p_{ij} for to elementer i og j var lig den euklidiske afstand mellem i og j . Disse instanser var væsentlig nemmere at løse en vores testinstanser. Vi kan derfor sige at de instanser vi har testet på ikke er blandt de nemmeste at løse. Det er dog ganske sikkert muligt at finde fordelinger, for hvilke vores testkørsel ville have forløbet anderledes.

3.2 Resultater

Alle grænseværdierne er blevet kørt for ovenstående testinstanser for $n \in \{40, 60, \dots, 200\}$ og $\Delta \in \{5, 25, 50, 75, 95, 100\}$. Der er blevet kørt 10 instanser for hver kombination af densitet og størrelse. Hvis en øvre grænseværdi ikke er blevet beregnet i løbet af 2 timer, har vi afbrudt beregningen. Grænseværdierne er blevet beregnet på Intel Pentium III (Coppermine) 930 MHz CPUer.

Gennemsnittene over de 10 instanser kan ses i tabellerne i kapitel 4. Her er for hver (n, Δ) listet henholdsvis gennemsnit af grænseværdiernes værdi, tidsforbrug og afvigelse fra løsningen af **QK**. For hvert Δ indeholder tabellen gennemsnittet af grænseværdi, løsnings Tid og afvigelse over alle n . Nederst i tabellen ses gennemsnit over samtlige udregnede instanser.

De eksakte løsninger er udregnet med *Caprara, Pisinger og Toths* løser [17], da det er den løser der har løst de største problemer. I de få tilfælde vi ikke har kunnet løse en instans i løbet af 85000 sekunder har vi brugt den nedre grænseværdi som denne løser har fundet. Den i tabellen angivne afvigelse er således en øvre grænse for afvigelsen fra den optimale løsning. Den må formodes at ligge meget tæt på løsningen og fejlen derfor være lille. De instanser for hvilke vi kun har udregnet nedre grænseværdier, er vist i figur 4.23 på s. 57.

Grafer over grænseværdiernes afvigelse fra den optimale løsning er vedlagt på s. 46. Der er to typer grafer. Den første type graf sammenligner afvigelsen for hvert Δ . Der er også en graf der viser den gennemsnitlige afvigelse over alle Δ . Den anden type graf (s. 49) viser for hver grænseværdi den gennemsnitlige afvigelse over alle n som funktion af Δ .

Man bør være opmærksom på at det kun er meningsfyldt at sammenligne gennemsnit, når samtlige grænseværdier er udregnet d.v.s når ingen er faldet for tidsgrænsen på 2 timer.

3.3 Kvalitet/beregningstid

Når effektiviteten af grænseværdierne skal vurderes, må man kigge på forholdet mellem beregningstid og kvalitet. En mulig anvendelse af grænseværdierne er i en *branch & bound* algoritme. Her beregnes grænseværdien i hver knude i *branch & bound*-træet. En lavere grænseværdi kan potentielt forsage at der skal behandles færre knuder, da større dele af *branch & bound*-træet kan udelades. For tilstrækkeligt store instanser vil man forvente at den numerisk laveste grænseværdi vil give den laveste kørertid for en *branch & bound*-algoritme. I praksis må man se på forholdet mellem beregningstid og

den numeriske kvalitet. En grænseværdi af lavere numerisk kvalitet kan for-
sage at der skal behandles flere knude, til gengæld kan den behandle hver
knude hurtigere.

Typisk vil man tilføje en reduktionsfase til *branch & bound* hvor man forsøger
at fikserer variable. For hver variabel x_i udregnes den øvre grænse under
forudsætningen $x_i = 0$. Hvis løsningen til dette problem er mindre end en
udregnet nedre grænse, fikseres x_i til 1. Ellers gentages proceduren med
 $x_i = 1$. I denne reduktionsfase kan det være fordelagtigt at bruge en langt
mere beregningstung øvre grænseværdi, da antallet af gange grænseværdien
skal udregnes er $\mathcal{O}(n^2)$.

Vi bør også nævne at vores beregningstider ikke for alle grænseværdier er
repræsentative for hvor hurtigt grænseværdierne vil kunne beregnes i en
branch & bound knude. Dette skyldes at nogle af grænseværdierne kan be-
regnes inkrementelt. Feks. kan man ved grænseværdier baseret på et *LP*
der løses med *simplex* (\mathcal{U}_{bc}^2) anvende varmstart af *dual-simplex*. Vores bereg-
ningstider kan derfor ses som en øvre grænse for beregningstiden i en knude
med $|N|$ ikke fikserede variable.

Vi bemærker først at grænseværdierne baseret på *upper planes* ($\mathcal{U}_{ghs}^1, \mathcal{U}_{ghs}^2,$
 $\mathcal{U}_{ghs}^3, \mathcal{U}_{ghs}^4$ og $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^4$) ligger langt fra løsningen. Typisk over 10%. Beregningstid-
den for disse grænseværdier er dog den laveste blandt dem vi har undersøgt.

Grænseværdierne \mathcal{U}_{hrw}^1 og \mathcal{U}_{hrw}^2 baseret på *SDP* er også typisk over 10% fra
den optimale løsning. Da beregningstiden også er høj, kan vi konkluderer at
disse grænseværdier ikke er brugbare. De 3 andre *SDP* grænseværdier $\mathcal{U}_{hrw}^3,$
 \mathcal{U}_{hrw}^4 og \mathcal{U}_{hrw}^5 er af god kvalitet. Afvigelsen er typisk under 1%, med und-
tagelse af $\Delta = 5\%$. Kvaliteten er bedre ved stor densitet. Vi bemærker at
 $\mathcal{U}_{hrw}^3, \mathcal{U}_{hrw}^4$ og \mathcal{U}_{hrw}^5 har ca. samme kvalitet, men beregningstiden for $\mathcal{U}_{hrw}^3,$
 \mathcal{U}_{hrw}^4 er markant lavere end for \mathcal{U}_{hrw}^5 . Grænserne \mathcal{U}_{hrw}^3 og \mathcal{U}_{hrw}^4 er derfor
de af *SDP* grænseværdierne der giver det bedste forhold mellem kvalitet og
beregningstid. Beregningstiden for *SDP* grænseværdierne er høj men kvali-
teten er også blandt de bedste. Det bør også nævnes at man muligvis kan
opnå forbedringer ved at anvende en anden *SDP*-løser end *SeDuMi*.

\mathcal{U}_{bc}^2 tager meget langt tid at beregne. Den giver dog nogen gode grænsevæ-
rdier specielt for høje densiteter. Da beregningstiden stiger skarpt for vok-
sende n , er denne grænseværdi dog nok ikke anvendelig som den er imple-
menteret her. Som nævnt i afsnit 2.2.1 er det dog muligt at forholdet mellem
kvalitet og beregningstid kan forbedres.

$\bar{\mathcal{U}}_{cpt}^1$ har ganske lav beregningstid og kvaliteten er god, specielt ved store
densiteter. Når densiteten er lille giver \mathcal{U}_{chm}^1 bedre grænseværdier, og den
er altid hurtigere at beregne end $\bar{\mathcal{U}}_{cpt}^1$. $\bar{\mathcal{U}}_{mv}^1$ giver som bevist altid bedre
grænseværdier end \mathcal{U}_{chm}^1 , men er meget langsommere.

$\bar{\mathcal{U}}_{bfs}^1$ giver meget gode grænseværdier, ofte de numerisk bedste i testen. Hvis

man sammenligner med de bedste *SDP* grænseværdier ser man at \bar{U}_{bfs}^1 er klart bedre for $\Delta = 5\%$ men at kvaliteten er sammenlignelig for store densiteter. Beregningstiden for \bar{U}_{bfs}^1 er lavere end *SDP* grænseværdierne, men meget høj i sammenligning med f.eks. \bar{U}_{cpt}^1 og U_{chm}^1 .

3.4 Anvendelse i *branch & bound*

Vi vil her prøve at komme med en anbefaling om hvilke af de afprøvede grænseværdier der kan anvendes til at forbedre de eksisterende *branch & bound* algoritmer.

Som tidligere nævnt er det ikke nemt at forudsige anvendeligheden af en grænseværdi i *branch & bound* alene ud fra de test vi har foretaget. Vores anbefalinger kan altså højst være et skøn. Vi vil her begrænse os til at diskutere grænseværdier i reduktionsfasen, da det er det vi mener vi kan sige mest om ud fra vores test. Hvorvidt de undersøgte grænseværdier kan anvendes i selve *branch & bound* træet vil det være nødvendigt med en konkret implementation af *branch & bound* for at vurdere.

I den mest succesfulde *branch & bound* algoritme udviklet af Caprara, Pisinger og Toth [5] anvendes grænseværdien \bar{U}_{cpt}^1 i reduktionsfasen. I hver knude i *branch & bound* træet anvendes en let modificeret udgave af \bar{U}_{cpt}^1 , hvor man ikke finder de optimale lagrange variable, men i stedet bruger de værdier der blev fundet i reduktionsfasen.

Vi bemærker at grænseværdien \bar{U}_{cpt}^1 har større afvigelse for lave Δ . At dette kan forudsagde problemer indikeres af at samtlige instanser der ikke kunne løses optimalt inden for tidsgrænsen på 85000 sekunder har $\Delta \leq 50$. For at udbedre dette problem kunne man anvende en grænseværdi, som er bedre end \bar{U}_{cpt}^1 for små Δ . En kandidat er U_{chm}^1 , der er hurtig at udregne og bedre end \bar{U}_{cpt}^1 for små Δ . Da antallet af gange grænseværdien skal udregnes ikke er meget stort i reduktionsfasen ($\mathcal{O}(n^2)$), er mange af de beregningstunge grænseværdier også kandidater. Grænseværdierne \bar{U}_{bfs}^1 og U_{hrw}^4 har meget lille afvigelse fra den optimale værdi, og er derfor kandidater trods den relativt store beregningstid.

3.5 Dominansforhold

Vi har gennemgået vores resultater for at finde instanser der kan vise at der ikke findes et dominansforhold mellem et par af grænseværdier. D.v.s vi finder et par af instanser I_1, I_2 for hvilke det gælder at den ene grænseværdi er bedst for I_1 og den anden grænseværdi er bedst for I_2 .

	U_{ghs}^1	U_{ghs}^2	U_{ghs}^3	U_{ghs}^4	U_{ghs}^4	U_{chm}^1	\bar{U}_{mv}^1	\bar{U}_{bfs}^1	\bar{U}_{cpt}^1	U_{bc}^2	U_{hrw}^1	U_{hrw}^2	U_{hrw}^3	U_{hrw}^4	U_{hrw}^5	
U_{ghs}^1																
U_{ghs}^2	≤															
U_{ghs}^3	≤	×														
U_{ghs}^4	≤	≤	≤													
U_{ghs}^4	≤	≤	≤	≤												
U_{chm}^1	×	×	×	×	×											
\bar{U}_{mv}^1			×	×	×	≤										
\bar{U}_{bfs}^1	×	×	×	×	×	×	×									
\bar{U}_{cpt}^1	×	×	×	×	×	×	×	×								
U_{bc}^2	×	×	×	×	×	×	×	×	×	≤						
U_{hrw}^1	×	×	×	×	×	×	×	×	×							
U_{hrw}^2	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	≤				
U_{hrw}^3	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	≤			
U_{hrw}^4	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	≤		
U_{hrw}^5	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	≤	

Tabel 3.1: Denne tabel er en oversigt over de viste dominansforhold. Et felt markeret med “≤” indikerer, at der i kapitel 2 er vist et dominansforhold mellem de to grænseværdier. Hvis et felt er markeret med “×” har vi fundet et eksempel der viser at der ikke eksisterer et dominansforhold. Hvis et felt er tomt, har vi ikke bevist noget dominansforhold og intet par af testinstanserne modbeviser at det eksisterer et dominansforhold.

Med ganske få undtagelser har vi, for hvert par af grænseværdier, enten kunne vise at der eksisterer et dominansforhold eller finde et eksempel der viser at et sådan dominansforhold ikke kan eksisterer.

Vores beregninger har ikke kunne modbevise eksistensen af et dominansforhold mellem U_{hrw}^1 og U_{bc}^2 , \bar{U}_{cpt}^1 , U_{chm}^1 , U_{mv}^1 eller \bar{U}_{bfs}^1 . Heller ikke mellem U_{hrw}^2 og U_{bc}^2 , U_{chm}^1 , U_{mv}^1 eller \bar{U}_{bfs}^1 har vi kunnet udelukke at der kan eksistere et dominansforhold.

Heller ikke mellem U_{mv}^1 og U_{ghs}^1 eller U_{ghs}^2 samt mellem U_{chm}^1 og U_{bc}^2 har vi kunnet modbevise, at der kan eksistere et dominansforhold.

For alle andre tilfælde end de ovenfor nævnte, har vi enten fundet et eksempel på at et dominansforhold ikke kan eksistere eller vist i kapitel 2 at et dominansforhold eksisterer. Tabel 3.1 giver et overblik over hvad der er vist for de grænseværdier vi har implementeret.

I tabel 4.1 har vi vist, hvilke testinstanser der er eksempler på ikke eksisterende dominansforhold. Da en instans fylder ret meget og man selv kan lave dem, ved at hente testinstansgeneratoren fra [17], har vi ikke udskrevet testinstanserne, men blot de parametre der skal til for at lave dem.

3.6 Konklusion

I denne rapport har vi beskrevet, implementeret og eksperimentelt afprøvet en række grænseværdier for QK.

Vi vil her kort beskrive vores bidrag. Vi har redegjort for en række implementationsdetaljer. I afsnit 2.5 har vi redegjort for hvorledes de i [15] udledte grænseværdier kan skrives på en form der kan anvendes af software til *semidifinit programmering*.

I afsnit 2.4.1 har vi vist hvorledes den af *Michelon og Veilleux* foreslåede *Lagrange-decomposition* kan løses effektivt. Dette er gjort ved at modificere en metode foreslået af *Chaillou, Hansen og Mahieu* [8] til at kunne løse *Lagrange subproblemet*.

Vi har også fundet en række dominansforhold. I afsnit 2.1 har vi kommet med eksempler på at der ikke kan eksistere et dominansforhold mellem en række grænser baseret på *upper planes*. Ved vores eksperimentelle afprøvelse har vi også fundet en række eksempler der viser at der ikke kan eksistere dominansforhold mellem mange af de undersøgte grænseværdier.

I afsnit 2.2.2 har vi vist at $\mathcal{U}_{bc}^2 \leq \mathcal{U}_{cpt}^1$. I afsnit 2.4.1 har vi vist at der gælder $\mathcal{U}_{mv}^1 \leq \mathcal{U}_{chm}^1$.

Herudover har vi på grundlag af de eksperimentelle data anbefalet hvilke grænseværdier der eventuelt kan anvendes til at forbedre eksisterende *branch & bound* algoritmer.

Kapitel 4

Resultater

4.1 Grænser baseret på upper planes (2.1)

Δ	n	u_{ghs}^1				u_{ghs}^2				u_{ghs}^3				u_{ghs}^4				u_{ghs}^4			
5	40	3841.1	0.000	6.38%	3841.1	0.002	6.38%	3841.1	0.001	6.38%	3841.1	0.000	6.38%	3841.1	0.000	6.38%	3841.1	0.000	6.38%		
	60	7073.5	0.000	17.61%	7073.5	0.000	17.61%	7073.5	0.001	17.61%	7073.5	0.002	17.61%	7073.5	0.002	17.61%	7066.3	0.001	17.49%		
	80	12281.6	0.000	22.70%	12281.6	0.000	22.70%	12281.6	0.000	22.70%	12281.6	0.001	22.70%	12281.6	0.001	22.70%	12280.7	0.001	22.70%		
	100	20309.4	0.000	13.84%	20309.4	0.002	13.84%	20309.4	0.003	13.84%	20309.4	0.001	13.84%	20309.4	0.001	13.84%	20309.4	0.000	13.84%		
	120	26156.3	0.001	25.04%	26156.3	0.001	25.04%	26154.3	0.002	25.03%	26153.2	0.001	25.02%	26153.2	0.001	25.02%	26152.7	0.001	25.02%		
	140	29070.8	0.000	40.17%	29070.8	0.000	40.17%	28873.0	0.006	39.22%	28845.9	0.002	39.09%	28845.9	0.002	39.09%	28825.7	0.003	38.99%		
	160	47548.4	0.001	21.53%	47548.4	0.001	21.53%	47466.8	0.003	21.32%	47448.3	0.005	21.27%	47448.3	0.005	21.27%	47435.9	0.005	21.24%		
	180	63277.5	0.002	21.69%	63277.5	0.002	21.69%	63277.5	0.008	21.69%	63277.5	0.002	21.69%	63277.5	0.002	21.69%	63277.5	0.002	21.69%		
	200	80120.0	0.002	18.06%	80120.0	0.004	18.06%	80120.0	0.008	18.06%	80120.0	0.002	18.06%	80120.0	0.002	18.06%	80120.0	0.004	18.06%		
	snit	32186.5	0.001	20.78%	32186.5	0.001	20.78%	32155.2	0.004	20.65%	32150.1	0.002	20.63%	32150.1	0.002	20.63%	32145.5	0.002	20.60%		
25	40	12288.7	0.000	35.22%	12177.5	0.001	34.00%	11615.8	0.002	27.82%	11571.1	0.001	27.33%	11571.1	0.001	27.33%	11491.1	0.000	26.45%		
	60	33259.9	0.000	21.47%	33128.1	0.000	20.99%	32331.5	0.000	18.08%	32277.8	0.001	17.88%	32277.8	0.001	17.88%	32245.3	0.001	17.76%		
	80	63938.8	0.000	16.83%	63906.8	0.001	16.78%	62876.6	0.001	14.89%	62831.8	0.003	14.81%	62831.8	0.003	14.81%	62791.5	0.001	14.74%		
	100	70563.5	0.000	61.73%	70402.9	0.003	61.36%	68748.6	0.002	57.57%	68680.3	0.000	57.41%	68680.3	0.000	57.41%	68573.6	0.001	57.17%		
	120	121479.0	0.000	31.08%	121069.7	0.001	30.64%	117974.6	0.002	27.30%	117922.4	0.001	27.24%	117922.4	0.001	27.24%	117858.6	0.004	27.18%		
	140	171338.8	0.002	36.89%	171338.8	0.002	36.89%	169802.6	0.004	35.66%	169756.9	0.001	35.62%	169756.9	0.001	35.62%	169688.5	0.005	35.57%		
	160	263339.6	0.000	18.54%	263339.6	0.001	18.54%	262037.2	0.006	17.96%	262001.2	0.002	17.94%	262001.2	0.002	17.94%	261932.8	0.006	17.91%		
	180	285091.7	0.000	31.80%	284296.4	0.002	31.44%	281104.7	0.008	29.96%	281073.0	0.003	29.95%	281073.0	0.003	29.95%	281019.8	0.005	29.92%		
	200	292617.4	0.003	49.02%	292616.0	0.003	49.02%	279991.0	0.009	42.59%	279912.4	0.010	42.50%	279912.4	0.010	42.50%	279454.8	0.006	42.31%		
	snit	145990.8	0.001	33.62%	145808.4	0.002	33.29%	142942.5	0.004	30.20%	142880.8	0.002	30.08%	142880.8	0.002	30.08%	142784.0	0.003	29.89%		
50	40	28155.8	0.000	35.76%	27979.1	0.000	34.91%	26135.2	0.001	26.01%	26025.2	0.001	25.48%	26025.2	0.001	25.48%	25913.4	0.000	24.95%		
	60	59877.1	0.000	36.11%	59025.0	0.000	34.17%	56138.9	0.000	27.61%	56027.2	0.001	27.35%	56027.2	0.001	27.35%	55863.0	0.002	26.98%		
	80	129103.0	0.000	18.48%	129004.7	0.000	18.39%	125162.9	0.003	14.86%	125053.8	0.002	14.76%	124920.5	0.001	14.64%	124920.5	0.001	14.64%		
	100	139788.9	0.001	52.13%	134151.9	0.001	46.00%	123927.1	0.003	34.87%	123774.5	0.001	34.70%	123774.5	0.001	34.70%	123520.1	0.003	34.42%		
	120	248172.4	0.001	31.47%	245019.4	0.005	29.80%	231395.4	0.003	22.59%	231253.2	0.002	22.51%	230967.7	0.003	22.36%	230967.7	0.003	22.36%		
	140	337212.5	0.000	43.17%	337134.5	0.002	43.14%	325147.5	0.003	38.05%	324971.3	0.006	37.97%	324662.3	0.003	37.84%	324662.3	0.003	37.84%		
	160	468072.5	0.000	23.59%	463634.4	0.002	22.41%	442335.9	0.003	16.80%	442214.4	0.004	16.76%	441865.0	0.006	16.67%	441865.0	0.006	16.67%		
	180	538720.9	0.003	30.88%	530614.0	0.007	28.91%	501763.0	0.005	21.90%	501646.6	0.005	21.87%	501303.2	0.007	21.79%	501303.2	0.007	21.79%		
	200	725904.3	0.000	29.32%	721863.2	0.005	28.60%	691684.9	0.010	23.23%	691562.7	0.007	23.20%	691562.7	0.007	23.20%	691244.4	0.007	23.15%		
	snit	297223.0	0.001	33.43%	294269.6	0.002	31.81%	280412.3	0.003	25.10%	280281.0	0.003	24.96%	280281.0	0.003	24.96%	280028.8	0.004	24.75%		
75	40	41765.3	0.000	35.10%	39817.9	0.000	28.80%	36626.6	0.000	18.48%	36477.4	0.000	18.00%	36339.8	0.000	17.55%	36339.8	0.000	17.55%		
	60	85625.0	0.001	37.38%	80476.4	0.000	29.12%	73145.1	0.000	17.36%	72960.7	0.000	17.06%	72754.6	0.002	16.73%	72754.6	0.002	16.73%		
	80	177215.8	0.000	26.77%	171998.2	0.001	23.04%	161274.5	0.002	15.37%	161132.5	0.003	15.27%	160930.5	0.000	15.12%	160930.5	0.000	15.12%		
	100	252779.6	0.000	31.20%	236771.4	0.001	22.89%	219355.9	0.004	13.85%	219207.8	0.002	13.77%	218921.5	0.002	13.63%	218921.5	0.002	13.63%		
	120	297904.4	0.000	33.20%	271903.1	0.002	21.57%	249581.5	0.002	11.59%	249436.8	0.003	11.53%	249136.6	0.003	11.39%	249136.6	0.003	11.39%		
	140	471259.2	0.000	36.53%	439300.2	0.002	27.27%	403159.4	0.005	16.80%	402999.0	0.005	16.75%	402665.0	0.004	16.66%	402665.0	0.004	16.66%		
	160	701572.5	0.000	25.79%	680858.0	0.002	22.07%	647736.2	0.004	16.13%	647585.1	0.007	16.11%	647254.7	0.007	16.05%	647254.7	0.007	16.05%		
	180	597836.3	0.002	52.66%	528335.2	0.006	34.91%	473309.0	0.006	20.86%	473137.0	0.009	20.82%	472695.4	0.006	20.71%	472695.4	0.006	20.71%		
	200	678161.9	0.001	51.06%	565674.7	0.004	26.00%	508657.3	0.007	13.30%	508494.1	0.009	13.26%	508140.0	0.009	13.19%	508140.0	0.009	13.19%		
	snit	367124.4	0.000	36.63%	335015.0	0.002	26.19%	308093.9	0.003	15.97%	307936.7	0.004	15.84%	307648.7	0.004	15.67%	307648.7	0.004	15.67%		
95	40	43609.7	0.000	63.84%	35994.0	0.001	35.23%	31228.6	0.003	17.33%	31067.0	0.000	16.72%	30914.7	0.000	16.15%	30914.7	0.000	16.15%		
	60	97880.1	0.000	61.20%	81986.1	0.000	35.03%	70530.9	0.002	16.16%	70348.6	0.001	15.86%	70135.2	0.003	15.51%	70135.2	0.003	15.51%		
	80	193982.7	0.000	39.89%	172207.3	0.001	24.19%	156522.4	0.000	12.88%	156327.0	0.002	12.74%	156122.4	0.002	12.59%	156122.4	0.002	12.59%		
	100	268381.2	0.002	49.27%	228352.0	0.002	27.00%	204073.2	0.001	13.50%	203867.7	0.006	13.39%	203674.9	0.000	13.28%	203674.9	0.000	13.28%		
	120	498739.4	0.002	27.16%	464843.4	0.002	18.52%	433961.5	0.002	10.64%	433765.7	0.004	10.59%	433492.7	0.004	10.52%	433492.7	0.004	10.52%		
	140	656028.0	0.002	28.02%	613855.5	0.004	19.79%	572352.4	0.006	11.69%	572135.2	0.003	11.65%	571804.3	0.005	11.58%	571804.3	0.005	11.58%		
	160	858897.5	0.000	34.82%	785773.3	0.002	23.34%	714260.0	0.004	12.11%	714050.8	0.008	12.08%	713586.6	0.008	12.01%	713586.6	0.008	12.01%		
	180	1038034.9	0.002	31.71%	945744.9	0.004	20.00%	876930.0	0.006	11.27%	876731.3	0.008	11.24%	876250.1	0.003	11.18%	876250.1	0.003	11.18%		
	200	1150039.1	0.002	53.23%	988208.0	0.003	31.67%	858039.1	0.009	14.33%	857826.2	0.007	14.30%	857181.4	0.015	14.21%	857181.4	0.015	14.21%		
	snit	533954.7	0.001	43.24%	479662.7	0.002	26.08%	435322.0	0.004	13.32%	435124.4	0.004	13.17%	434795.8	0.004	13.00%	434795.8	0.004	13.00%		
100	40	63175.9	0.001	23.67%	58870.2	0.001	15.24%	56008.2	0.001	9.64%	55845.8	0.001	9.32%	55755.2	0.000	9.15%	55755.2	0.000	9.15%		
	60	136748.3	0.000	19.93%	126666.9	0.000	11.09%	120976.0	0.001	6.09%	120824.6	0.001	5.96%	120729.2	0.001	5.88%	120729.2	0.001	5.88%		
	80	201042.1	0.000	40.13%	173801.0	0.000	21.15%	158845.4	0.001	10.72%	158649.2	0.003	10.58%	158462.5	0.001	10.45%	158462.5	0.001	10.45%		
	100	346321.2	0.001	33.11%	310725.3	0.001	19.42%	287406.8	0.003	10.46%	287187.8	0.003	10.38%	286972.2	0.002	10.29%	286972.2	0.002	10.29%		
	120	497050.4	0.001	37.67%	443560.8	0.004	22.86%	401963.2	0.002	11.33%	401728.2	0.003	11.27%	401426.3	0.005	11.19%	401426.3	0.005	11.19%		
	140	739307.0	0.000	26.21%	688295.1	0.002	17.50%	646400.4	0.006	10.35%	646167.2	0.004	10								

4.2 Grænser baseret på lagrange relaxering (2.3.1, 2.4.1)

Δ	n	u_{chm}^1			\bar{u}_{mv}^1			\bar{u}_{bfs}^1		
5	40	3639.7	0.0	0.80%	3620.4	0.3	0.27%	3637.4	3.6	0.74%
	60	6053.3	0.0	0.65%	6036.3	0.6	0.37%	6043.9	9.6	0.49%
	80	10053.9	0.0	0.45%	10038.1	1.4	0.29%	10052.5	15.8	0.43%
	100	17896.2	0.0	0.32%	17868.9	2.0	0.16%	17894.4	24.8	0.31%
	120	20977.1	0.0	0.28%	20954.0	3.2	0.17%	20981.1	40.4	0.30%
	140	20854.8	0.0	0.56%	20848.0	2.2	0.53%	20883.8	75.6	0.70%
	160	39175.6	0.0	0.13%	39155.0	12.5	0.08%	39178.4	76.5	0.14%
	180	52075.7	0.0	0.14%	52057.9	7.3	0.11%	52086.6	95.0	0.17%
	200	67917.9	0.1	0.08%	67897.1	22.0	0.05%	67926.2	111.0	0.09%
	snit	26516.0	0.0	0.38%	26497.3	5.7	0.22%	26520.5	50.2	0.37%
25	40	9367.0	0.0	3.07%	9303.9	0.6	2.38%	9237.3	3.7	1.65%
	60	27539.1	0.0	0.58%	27483.9	1.8	0.37%	27477.8	8.5	0.35%
	80	55282.7	0.0	1.02%	55147.2	6.5	0.77%	55081.0	16.1	0.65%
	100	44712.0	0.0	2.48%	44696.6	3.0	2.44%	43927.0	30.0	0.68%
	120	93198.4	0.1	0.57%	93162.3	4.9	0.53%	92916.4	38.6	0.26%
	140	126998.9	0.1	1.46%	126998.1	2.4	1.46%	125933.2	59.4	0.61%
	160	223255.6	0.2	0.50%	223198.4	64.7	0.47%	222502.1	62.2	0.16%
	180	217898.2	0.2	0.74%	217877.6	34.8	0.73%	216881.7	93.5	0.27%
	200	199251.7	0.3	1.47%	199244.9	20.3	1.47%	197078.6	122.3	0.36%
	snit	110833.7	0.1	1.32%	110790.3	15.5	1.18%	110115.0	48.3	0.55%
50	40	21507.2	0.0	3.70%	21430.6	1.1	3.33%	21015.5	3.7	1.33%
	60	45246.5	0.0	2.85%	45180.2	3.1	2.70%	44289.7	8.4	0.67%
	80	109858.4	0.0	0.82%	109724.1	9.4	0.69%	109385.4	14.7	0.38%
	100	95205.3	0.1	3.61%	95169.7	15.4	3.57%	92343.2	24.7	0.50%
	120	191407.1	0.2	1.40%	191308.8	48.5	1.35%	189421.8	36.1	0.35%
	140	238657.8	0.3	1.33%	238641.4	28.4	1.32%	235975.8	47.3	0.19%
	160	383141.4	0.5	1.16%	382994.6	164.9	1.12%	379500.9	66.1	0.20%
	180	418091.0	0.6	1.57%	418083.1	27.9	1.57%	412487.2	84.8	0.21%
	200	565996.5	0.8	0.83%	565987.2	43.8	0.83%	562206.9	107.0	0.16%
	snit	229901.2	0.3	1.92%	229835.5	38.1	1.83%	227402.9	43.7	0.44%
75	40	32125.6	0.0	3.92%	31951.6	3.3	3.36%	31403.0	3.7	1.58%
	60	63666.2	0.0	2.15%	63500.4	6.4	1.88%	62831.3	8.1	0.81%
	80	141916.0	0.1	1.52%	141911.1	2.0	1.52%	140108.4	13.5	0.23%
	100	196450.7	0.2	1.96%	196389.3	15.1	1.93%	193462.1	23.3	0.41%
	120	227887.5	0.3	1.89%	227679.9	195.5	1.80%	224747.6	31.2	0.49%
	140	351873.0	0.5	1.94%	351869.9	30.6	1.94%	345831.8	47.5	0.19%
	160	564646.6	0.7	1.24%	564514.8	506.8	1.21%	558749.1	63.1	0.18%
	180	398651.4	0.8	1.80%	398651.4	14.4	1.80%	392090.6	77.8	0.12%
	200	458038.2	3.7	2.03%	458038.2	17.9	2.03%	449686.5	102.5	0.17%
	snit	270583.9	0.7	2.05%	270500.7	88.0	1.94%	266545.6	41.2	0.46%
95	40	29092.9	0.0	9.30%	29086.9	0.4	9.28%	27043.1	3.8	1.60%
	60	63275.0	0.0	4.21%	63275.0	0.6	4.21%	61131.8	8.4	0.68%
	80	142257.8	0.1	2.59%	142190.8	11.2	2.54%	139650.0	14.6	0.71%
	100	182726.9	0.2	1.63%	182719.2	13.1	1.62%	180634.5	21.0	0.46%
	120	398917.3	0.4	1.71%	398845.6	89.4	1.69%	393332.2	32.7	0.28%
	140	521751.8	0.5	1.82%	521724.4	113.2	1.81%	513564.1	41.5	0.22%
	160	650989.7	0.8	2.18%	650944.8	221.6	2.18%	639207.5	62.9	0.33%
	180	804380.2	1.0	2.06%	804380.2	15.1	2.06%	790677.2	80.8	0.32%
	200	775864.7	1.2	3.38%	775781.3	563.3	3.37%	751654.3	103.7	0.15%
	snit	396584.0	0.5	3.21%	396549.8	114.2	3.20%	388543.9	41.0	0.53%
100	40	53236.7	0.0	4.22%	53166.3	2.0	4.08%	51876.2	3.6	1.55%
	60	116462.6	0.0	2.14%	116361.3	11.2	2.05%	115150.9	8.2	0.99%
	80	146642.8	0.1	2.22%	146622.1	20.4	2.20%	144221.2	14.0	0.53%
	100	267738.1	0.2	2.90%	267738.1	4.4	2.90%	260899.8	22.0	0.27%
	120	369079.9	0.4	2.23%	369069.6	20.0	2.22%	362426.4	33.1	0.38%
	140	597091.9	0.6	1.93%	597021.5	122.7	1.92%	587282.8	47.9	0.26%
	160	560753.1	0.8	2.25%	560522.5	978.7	2.21%	550132.9	60.0	0.31%
	180	701237.7	1.0	2.54%	701237.4	21.1	2.54%	685521.2	78.3	0.24%
	200	902041.2	1.4	1.66%	902026.3	79.8	1.66%	891733.9	103.1	0.50%
	snit	412698.2	0.5	2.45%	412640.6	140.0	2.42%	405471.7	41.1	0.56%
gennemsnit	241186.2	0.3	1.89%	241135.7	66.9	1.80%	237433.3	44.3	0.49%	

tallene er gennemsnit for 10 instanser

4.3 Grænser baseret på linearisering (2.2)

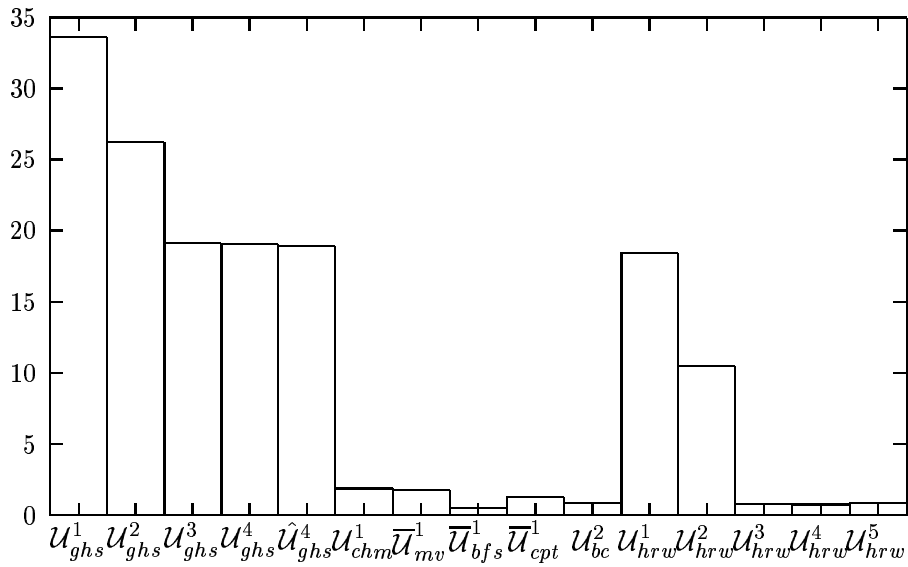
Δ	n	\bar{u}_{cpt}^1			u_{bc}^2		
5	40	3655.1	0.0	1.23%	3636.0	25.2	0.70%
	60	6099.1	0.1	1.41%	6041.2	160.0	0.45%
	80	10165.5	0.2	1.56%	-	-	-
	100	18075.6	0.4	1.32%	-	-	-
	120	21204.1	0.7	1.37%	-	-	-
	140	21185.4	1.5	2.15%	-	-	-
	160	39707.1	2.1	1.49%	-	-	-
	180	52853.8	3.7	1.64%	-	-	-
	200	68838.9	4.8	1.44%	-	-	-
	snit	26865.0	1.5	1.51%	4838.6	92.6	0.57%
25	40	9352.2	0.0	2.91%	9288.8	35.5	2.21%
	60	27633.3	0.1	0.92%	27486.2	326.4	0.38%
	80	55460.4	0.3	1.34%	-	-	-
	100	44848.1	0.7	2.79%	-	-	-
	120	93534.4	1.0	0.93%	-	-	-
	140	127625.4	2.1	1.96%	-	-	-
	160	224379.7	2.5	1.01%	-	-	-
	180	218847.9	4.5	1.18%	-	-	-
	200	200111.3	7.7	1.91%	-	-	-
	snit	111310.3	2.1	1.66%	18387.5	181.0	1.30%
50	40	21423.1	0.1	3.29%	21092.1	55.9	1.70%
	60	44923.5	0.2	2.11%	44363.4	699.3	0.84%
	80	109899.2	0.3	0.85%	-	-	-
	100	94097.5	0.7	2.40%	-	-	-
	120	191226.2	1.2	1.31%	-	-	-
	140	238957.6	2.2	1.45%	-	-	-
	160	382115.9	2.9	0.89%	-	-	-
	180	418087.4	5.2	1.57%	-	-	-
	200	566054.7	6.0	0.84%	-	-	-
	snit	229642.8	2.1	1.64%	32727.8	377.6	1.27%
75	40	31672.9	0.1	2.45%	31404.3	29.4	1.59%
	60	63194.6	0.1	1.39%	62827.7	116.4	0.80%
	80	141223.9	0.3	1.03%	140095.9	978.8	0.22%
	100	194996.5	0.5	1.21%	193449.6	2110.9	0.41%
	120	225292.5	0.8	0.73%	224712.6	2982.4	0.47%
	140	348988.8	1.7	1.11%	-	-	-
	160	562433.9	2.5	0.84%	-	-	-
	180	394650.6	3.6	0.78%	-	-	-
	200	452453.2	4.2	0.78%	-	-	-
	snit	268323.0	1.5	1.15%	130498.0	1243.6	0.70%
95	40	27334.2	0.1	2.69%	27041.3	17.7	1.59%
	60	61479.3	0.1	1.25%	61128.2	102.2	0.68%
	80	140216.3	0.3	1.12%	139635.3	445.8	0.70%
	100	181429.9	0.4	0.91%	180622.6	1346.5	0.46%
	120	394823.5	0.7	0.66%	-	-	-
	140	515797.6	1.3	0.65%	-	-	-
	160	641101.1	2.1	0.63%	-	-	-
	180	793737.2	3.2	0.71%	-	-	-
	200	754584.2	4.7	0.54%	-	-	-
	snit	390055.9	1.4	1.02%	102106.8	478.0	0.86%
100	40	52049.7	0.1	1.89%	51876.7	24.8	1.55%
	60	115359.9	0.1	1.17%	115140.3	151.1	0.98%
	80	144521.1	0.3	0.74%	144201.2	397.7	0.51%
	100	261785.9	0.5	0.61%	260879.8	1990.1	0.27%
	120	363701.9	0.9	0.74%	-	-	-
	140	588880.7	1.3	0.53%	-	-	-
	160	551180.0	1.9	0.50%	-	-	-
	180	687030.3	2.9	0.46%	-	-	-
	200	893151.6	4.2	0.66%	-	-	-
	snit	406406.8	1.3	0.81%	143024.5	640.9	0.83%
gennemsnit		238767.3	1.7	1.30%	91838.1	631.4	0.87%

tallene er gennemsnit for 10 instanser

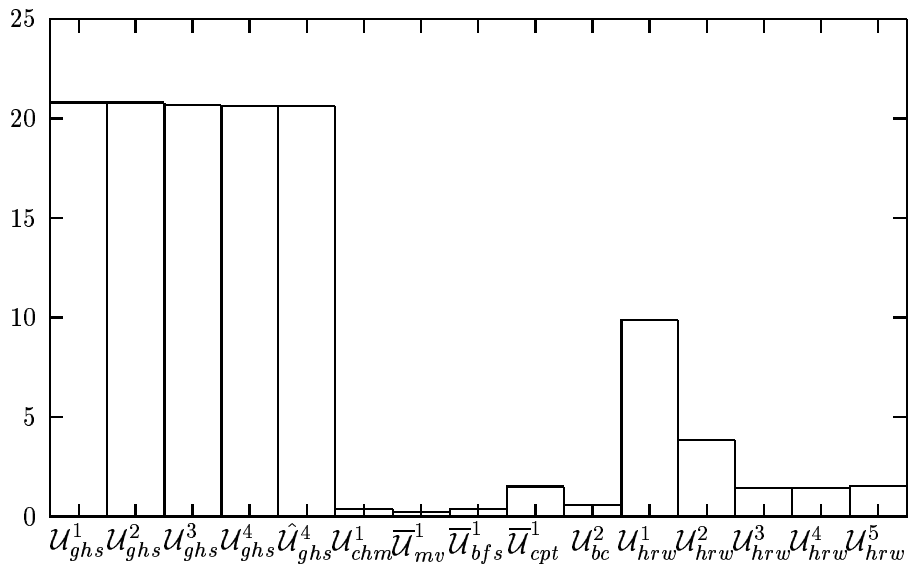
4.4 Grænser baseret på sdp (2.5)

Δ	n	$U_{h,rrm}^1$			$U_{h,rrm}^2$			$U_{h,rrm}^3$			$U_{h,rrm}^4$			$U_{h,rrm}^5$		
5	40	3733.5	3.9	3.40%	3657.2	5.6	1.29%	3654.6	5.3	1.22%	3654.6	5.9	1.22%	3654.4	14.2	1.21%
	60	6473.5	9.7	7.64%	6176.5	12.4	2.70%	6125.0	13.5	1.84%	6124.5	14.2	1.83%	6124.1	75.8	1.83%
	80	11032.7	25.5	10.23%	10369.5	29.1	3.60%	10204.5	34.2	1.95%	10204.4	36.8	1.95%	10204.4	222.1	1.95%
	100	19056.3	54.3	6.82%	18239.4	68.1	2.24%	18040.2	83.5	1.12%	18040.0	90.6	1.12%	18039.7	579.5	1.12%
	120	23224.5	125.4	11.02%	21794.5	143.0	4.19%	21249.5	170.4	1.58%	21249.4	180.1	1.58%	21249.0	1053.8	1.58%
	140	24465.5	243.1	17.97%	22447.5	273.7	8.24%	21252.0	309.4	2.47%	21251.3	327.9	2.47%	21251.0	1810.4	2.47%
	160	43202.7	408.0	10.42%	40671.9	509.7	3.95%	39529.2	566.3	1.03%	39528.7	619.8	1.03%	39528.5	2410.6	1.03%
	180	57955.0	644.5	11.45%	54607.6	799.2	5.01%	52618.5	909.3	1.19%	52617.9	1014.2	1.19%	52617.4	3928.0	1.19%
200	74487.9	904.3	9.76%	70189.1	1107.9	3.43%	68330.9	1345.5	0.69%	68330.8	1564.6	0.69%	-	-	-	
snit	29292.4	268.8	9.86%	27572.6	327.6	3.85%	26778.3	381.9	1.46%	26778.0	428.2	1.45%	21583.6	1261.8	1.55%	
25	40	10665.2	3.8	17.36%	10036.3	4.2	10.44%	9359.5	4.7	2.99%	9357.3	5.4	2.97%	9355.6	17.8	2.95%
	60	30610.2	10.0	17.79%	28771.0	11.5	5.07%	27574.6	14.8	0.71%	27573.1	15.3	0.70%	27572.3	69.6	0.70%
	80	60079.2	24.4	9.78%	57439.9	28.7	4.96%	55204.5	38.2	0.87%	55198.2	42.1	0.86%	55193.7	255.5	0.85%
	100	57340.8	55.2	31.42%	51618.5	61.1	18.31%	44169.9	72.0	1.23%	44162.7	80.6	1.22%	44158.9	537.0	1.21%
	120	108196.4	120.3	16.75%	100799.9	138.6	8.77%	93123.7	185.1	0.49%	93118.0	204.2	0.48%	93113.9	1090.5	0.47%
	140	151620.2	240.7	21.13%	139678.8	274.3	11.59%	125784.4	340.3	0.49%	125782.4	350.7	0.49%	125781.6	1968.3	0.49%
	160	247966.9	373.4	11.62%	234982.6	457.7	5.78%	222693.4	626.3	0.25%	222690.8	679.3	0.25%	222689.6	3146.9	0.25%
	180	257229.1	583.3	18.92%	237930.8	664.0	10.00%	216969.9	888.5	0.31%	216953.5	929.8	0.30%	216944.7	4885.8	0.30%
200	244981.3	916.2	24.76%	224514.0	1019.1	14.33%	197041.6	1306.5	0.34%	197038.1	1320.2	0.34%	-	-	-	
snit	129854.4	258.6	18.17%	120641.3	295.5	9.92%	110213.5	386.3	0.85%	110208.2	403.1	0.85%	99351.3	1496.4	0.90%	
50	40	24983.6	3.8	20.46%	23277.1	4.1	12.23%	21124.5	5.1	1.85%	21119.3	5.7	1.83%	21117.7	17.3	1.82%
	60	53244.1	10.1	21.03%	49342.1	11.0	12.16%	44447.9	13.9	1.03%	44437.1	15.7	1.01%	44429.1	76.0	0.99%
	80	121197.5	23.0	11.22%	115358.3	27.5	5.86%	109489.4	39.6	0.48%	109488.6	39.4	0.48%	109488.1	247.7	0.48%
	100	117328.0	55.1	27.69%	107124.0	61.0	16.58%	92496.8	79.2	0.66%	92462.2	87.7	0.63%	92447.6	576.6	0.61%
	120	221980.3	121.9	17.60%	207665.9	136.7	10.02%	189511.1	193.2	0.40%	189489.6	206.4	0.39%	189481.2	1185.8	0.38%
	140	295612.0	240.2	25.51%	268514.0	265.6	14.00%	236070.2	396.7	0.23%	236067.8	397.2	0.23%	236066.9	2370.4	0.23%
	160	429187.8	397.0	13.32%	407314.1	449.8	7.54%	379608.6	679.1	0.23%	379553.2	750.9	0.21%	379541.8	3333.8	0.21%
	180	484159.1	627.1	17.62%	453260.3	704.2	10.11%	412487.3	1022.0	0.21%	412469.9	1113.6	0.20%	412453.4	4668.1	0.20%
200	657937.2	855.6	17.21%	614041.8	947.6	9.39%	562046.7	1399.9	0.13%	562031.4	1576.1	0.13%	-	-	-	
snit	267292.2	259.3	19.07%	249544.2	289.7	10.88%	227475.8	425.4	0.58%	227457.7	465.9	0.57%	185628.2	1559.5	0.61%	
75	40	37548.3	4.0	21.46%	34913.8	4.0	12.94%	31494.2	5.1	1.88%	31491.8	5.4	1.87%	31491.0	19.8	1.87%
	60	75237.2	9.5	20.72%	69692.8	10.8	11.82%	62953.6	14.3	1.01%	62939.2	16.4	0.98%	62931.5	72.8	0.97%
	80	162244.2	22.5	16.06%	152447.5	25.6	9.05%	140176.6	41.1	0.28%	140169.1	42.3	0.27%	140167.4	241.4	0.27%
	100	225336.3	53.9	16.96%	212220.2	61.0	10.15%	193579.0	89.8	0.47%	193564.9	94.0	0.47%	193561.1	628.0	0.46%
	120	259870.3	114.6	16.19%	245762.0	126.7	9.88%	225169.3	185.7	0.68%	225123.2	210.3	0.65%	225084.5	1254.4	0.64%
	140	413286.1	236.0	19.73%	386186.9	262.4	11.88%	345988.3	406.1	0.24%	345932.7	447.8	0.22%	345914.5	2168.5	0.21%
	160	645669.4	382.5	15.76%	606143.0	453.0	8.68%	558900.2	713.6	0.21%	558865.2	749.2	0.20%	558840.0	3191.2	0.20%
	180	490277.7	651.2	25.19%	451350.7	697.3	15.25%	392968.1	1064.5	0.35%	392810.0	1358.0	0.31%	-	-	-
200	541403.4	913.6	20.60%	508731.8	963.6	13.32%	450908.6	1382.2	0.44%	450544.0	2036.5	0.36%	-	-	-	
snit	316763.7	265.3	19.19%	296383.2	289.4	11.44%	266904.2	433.6	0.61%	266826.7	551.1	0.59%	222570.0	1082.3	0.66%	
95	40	36807.2	3.7	38.28%	33283.6	3.9	25.05%	27095.3	4.9	1.80%	27091.4	5.3	1.78%	27089.8	17.3	1.78%
	60	81456.9	9.4	34.16%	73408.4	10.7	20.90%	61213.7	14.9	0.82%	61197.2	16.6	0.79%	61194.6	75.6	0.78%
	80	169535.5	23.2	22.26%	157357.2	26.2	13.48%	139745.0	40.8	0.78%	139722.3	43.8	0.76%	139712.1	256.5	0.75%
	100	224435.2	54.6	24.82%	206369.1	59.6	14.78%	180961.0	96.8	0.65%	180902.5	102.5	0.61%	180857.3	655.5	0.59%
	120	456240.5	117.1	16.32%	428790.8	131.7	9.32%	393541.8	228.7	0.34%	393487.7	233.0	0.32%	393442.7	1248.6	0.31%
	140	601043.5	236.5	17.29%	562747.8	259.9	9.82%	513840.6	428.0	0.27%	513830.4	464.6	0.27%	513820.3	2165.8	0.27%
	160	770867.4	369.1	21.00%	716311.2	419.3	12.44%	639263.0	729.5	0.34%	639260.0	732.6	0.34%	639259.0	3426.4	0.34%
	180	932655.6	619.4	18.34%	875004.8	662.9	11.02%	791017.0	1182.8	0.37%	790957.8	1227.4	0.36%	790904.6	5121.6	0.35%
200	970567.7	906.3	29.32%	887107.8	967.7	18.20%	751750.0	1678.9	0.16%	751698.7	1762.3	0.16%	-	-	-	
snit	471512.2	259.9	24.64%	437820.1	282.4	15.00%	388714.2	489.5	0.61%	388683.1	509.8	0.60%	343285.0	1620.9	0.65%	
100	40	59786.2	3.7	17.04%	56495.4	4.1	10.59%	51930.4	5.8	1.66%	51929.7	5.9	1.66%	51929.5	21.1	1.66%
	60	127785.8	9.3	12.07%	122263.6	10.5	7.22%	115225.5	16.2	1.05%	115218.1	15.9	1.05%	115216.4	83.8	1.04%
	80	175450.4	22.3	22.30%	162355.3	25.8	13.17%	144311.9	38.1	0.59%	144293.3	41.5	0.58%	144281.8	258.0	0.57%
	100	311829.0	50.5	19.85%	292046.7	57.3	12.25%	260964.3	93.8	0.30%	260939.3	100.5	0.29%	260935.9	639.7	0.29%
	120	441412.6	119.5	22.26%	408114.1	130.4	13.04%	362481.0	238.6	0.40%	362474.8	235.2	0.40%	362473.9	1257.3	0.40%
	140	684567.3	238.9	16.86%	642049.5	260.2	9.61%	587355.6	459.0	0.27%	587327.9	457.8	0.26%	587322.2	2203.8	0.26%
	160	660339.6	405.8	20.41%	616473.3	442.0	12.41%	550574.6	717.2	0.39%	550492.8	803.8	0.38%	550447.4	3503.7	0.37%
	180	849735.0	620.9	24.25%	785416.9	678.2	14.85%	685724.4	1133.7	0.27%	685629.1	1210.9	0.26%	685569.0	4833.8	0.25%
200	1081628.9	893.2	21.91%	1004023.2	970.0	13.16%	892090.1	1620.9	0.54%	891970.9	1757.8	0.53%	-	-	-	
snit	488059.4	262.7	19.66%	454359.8	286.5	11.81%	405628.6	480.4	0.61%	405586.2	514.4	0.60%	344772.0	1600.1	0.60%	
gennemsnit	283795.7	262.4	18.43%	264386.9	295.2	10.48%	237619.1	432.8	0.79%	237590.0	478.7	0.78%	202445.8	1444.4	0.83%	

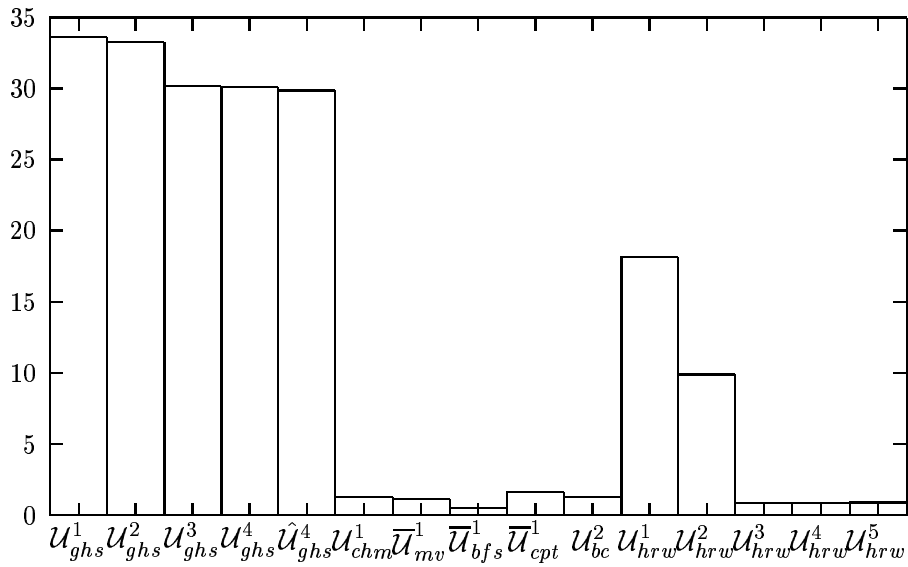
tallene er gennemsnit for 10 instanser



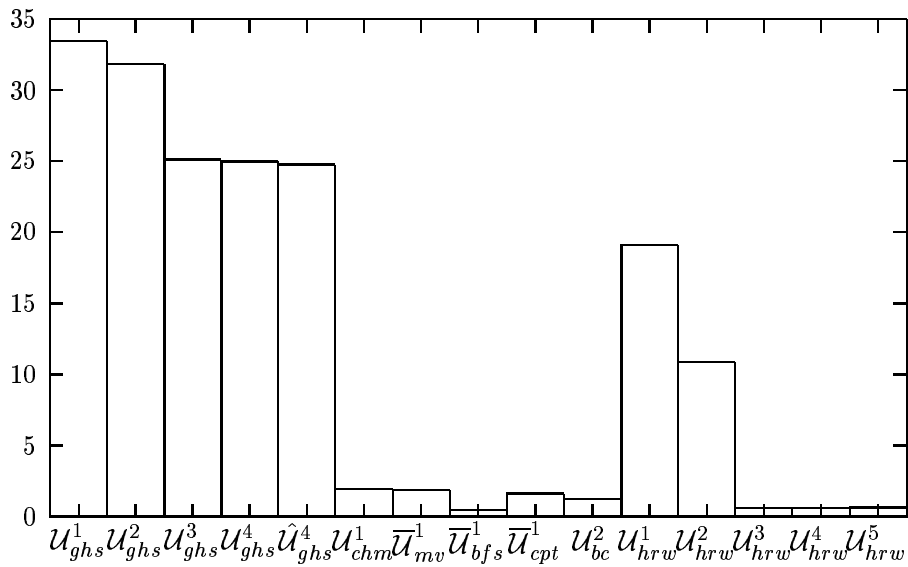
Figur 4.1: Gennemsnit for alle Δ



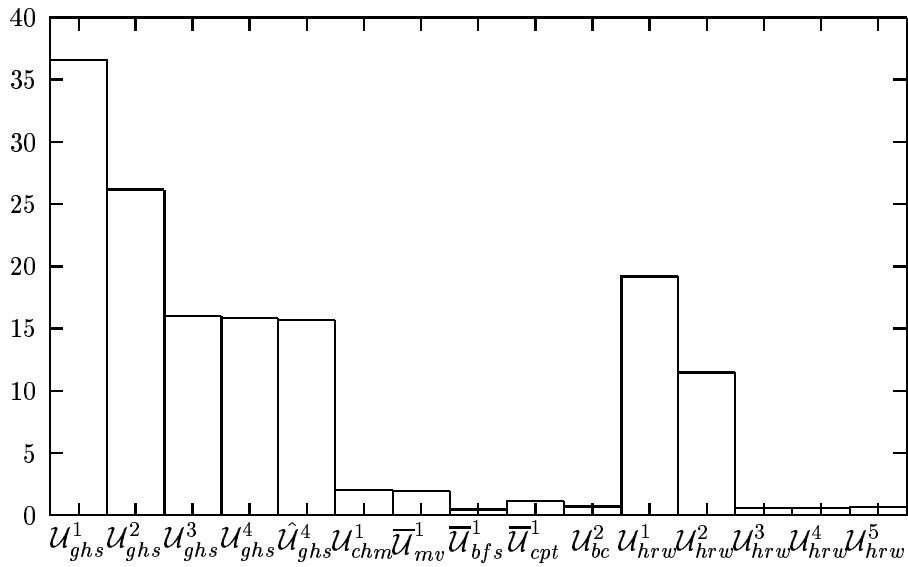
Figur 4.2: Gennemsnit for $\Delta = 5$



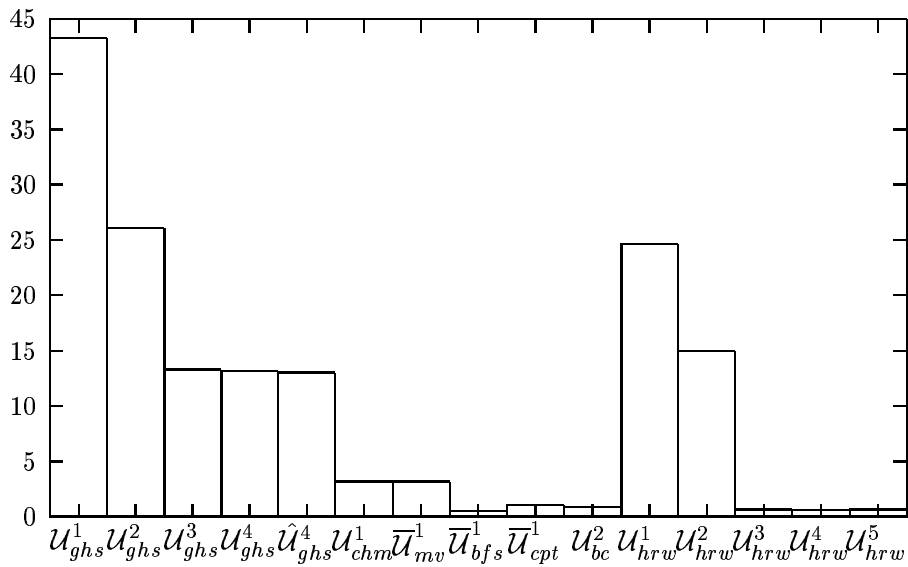
Figur 4.3: Gennemsnit for $\Delta = 25$



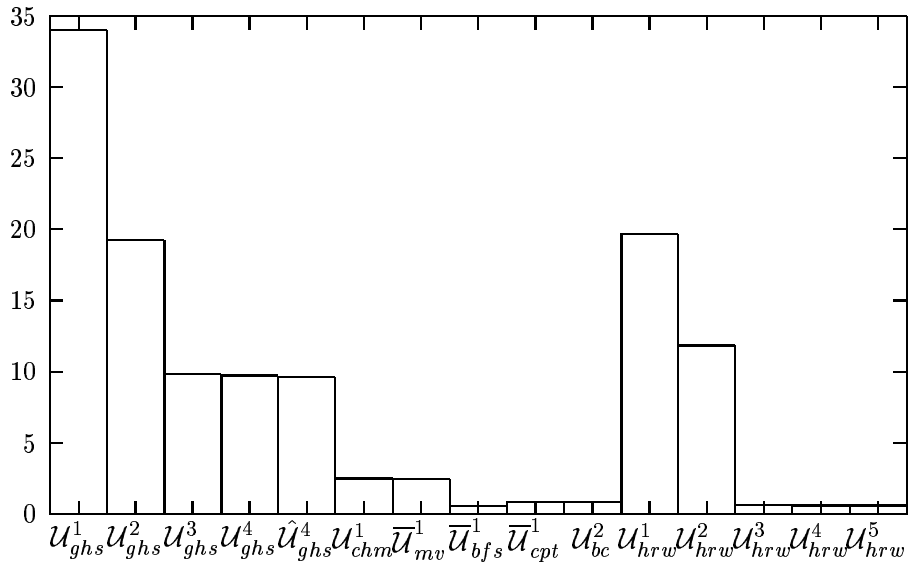
Figur 4.4: Gennemsnit for $\Delta = 50$



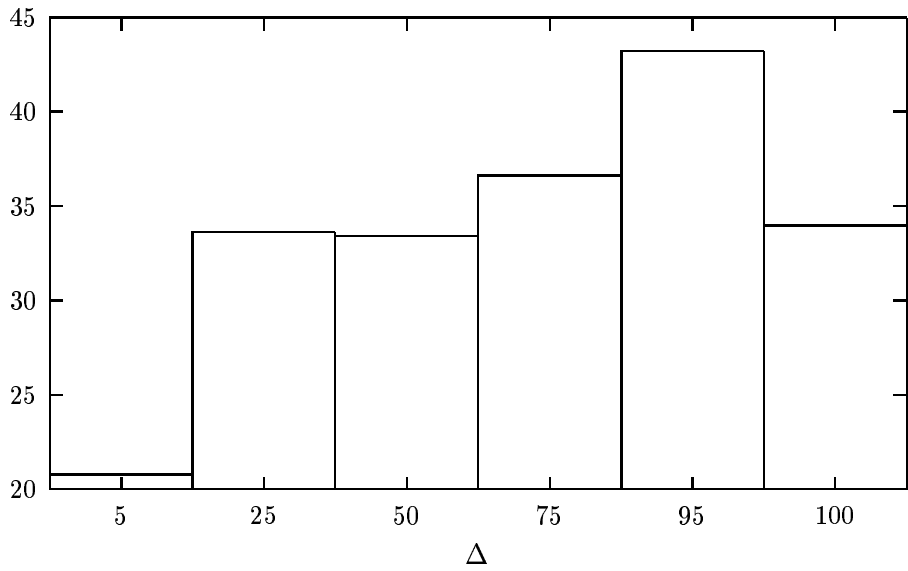
Figur 4.5: Gennemsnit for $\Delta = 75$



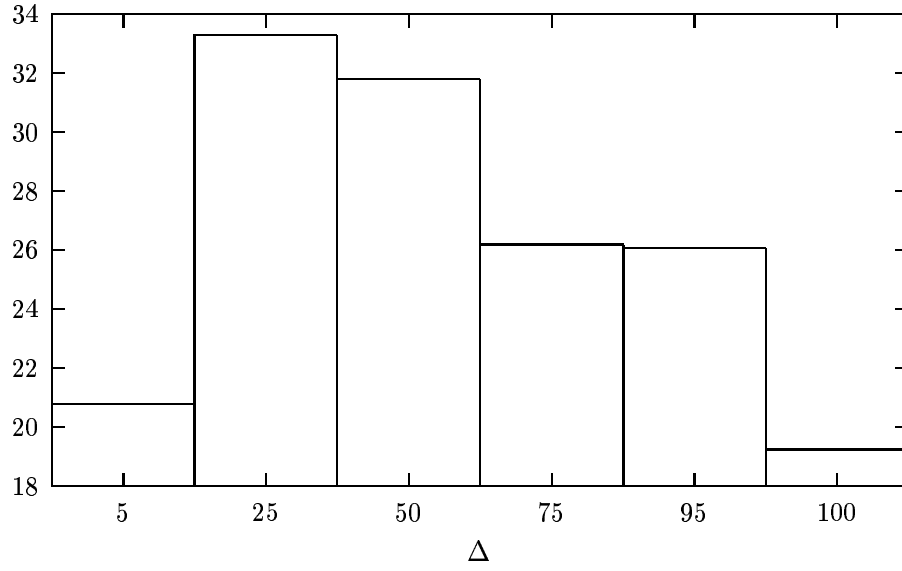
Figur 4.6: Gennemsnit for $\Delta = 95$



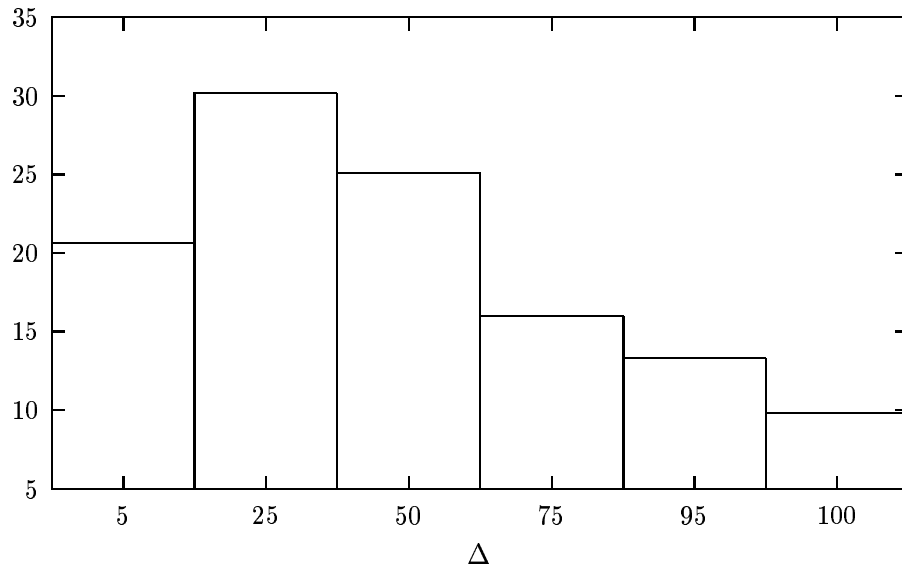
Figur 4.7: Gennemsnit for $\Delta = 100$



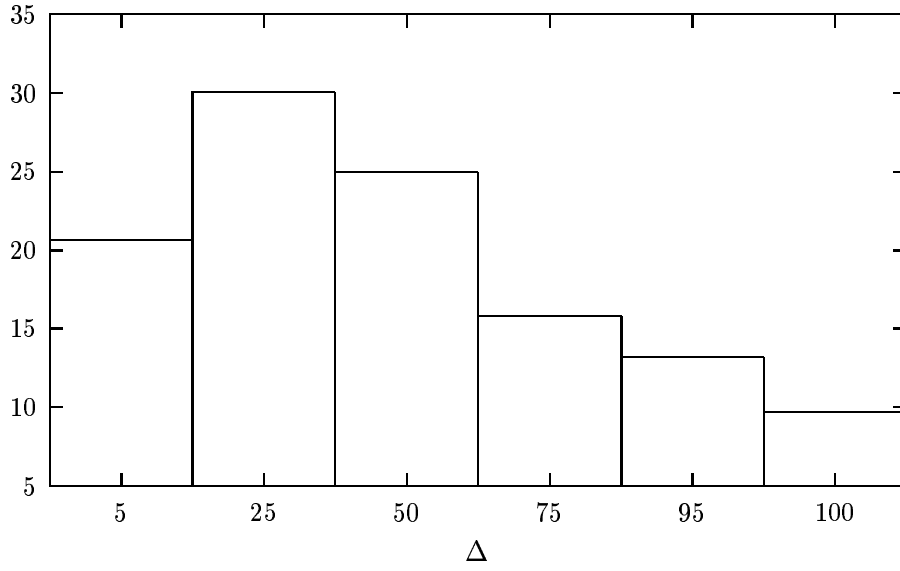
Figur 4.8: Gennemsnit for U^1_{ghs}



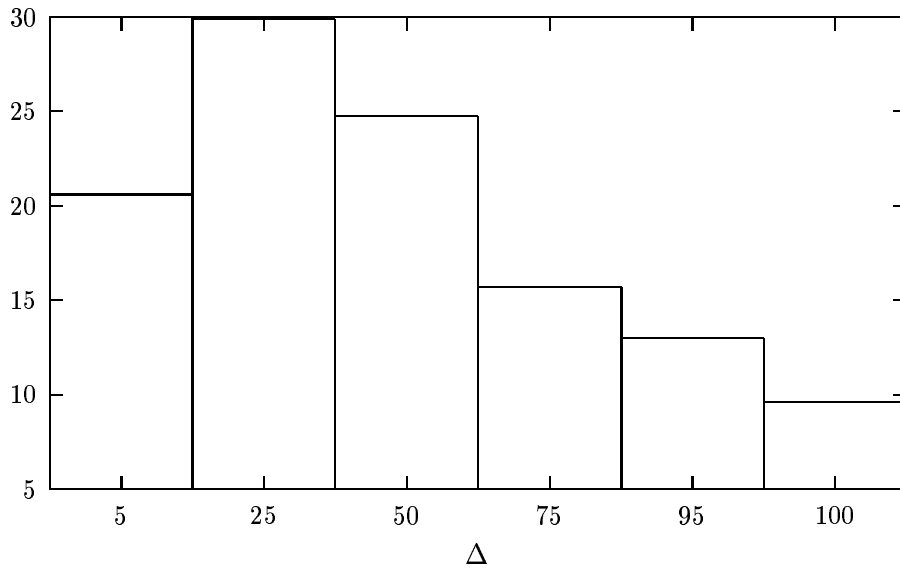
Figur 4.9: Gennemsnit for \mathcal{U}_{ghs}^2



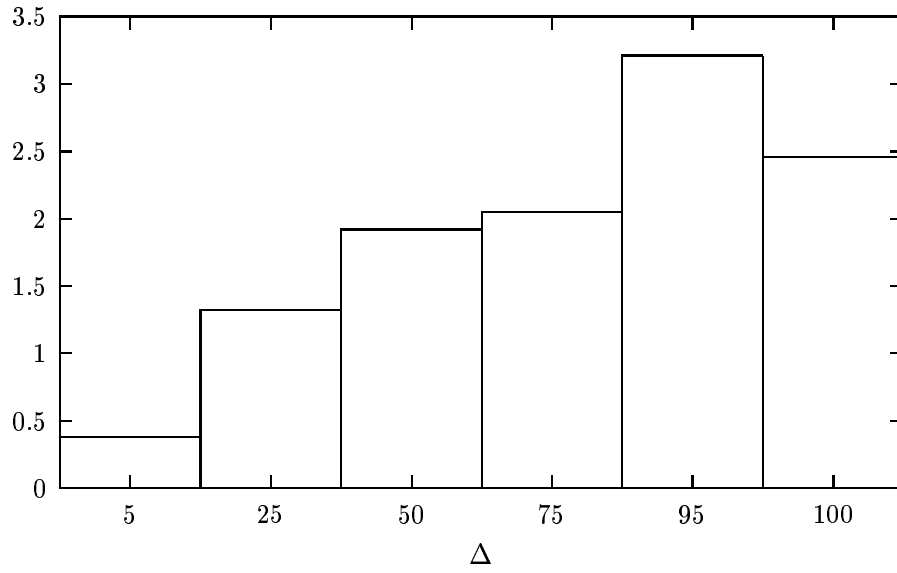
Figur 4.10: Gennemsnit for \mathcal{U}_{ghs}^3



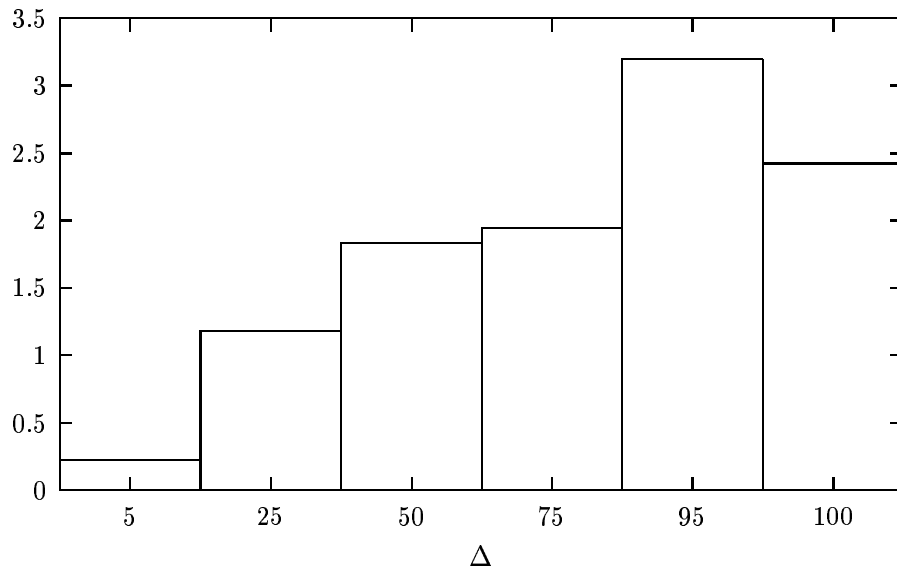
Figur 4.11: Gennemsnit for \mathcal{U}_{ghs}^4



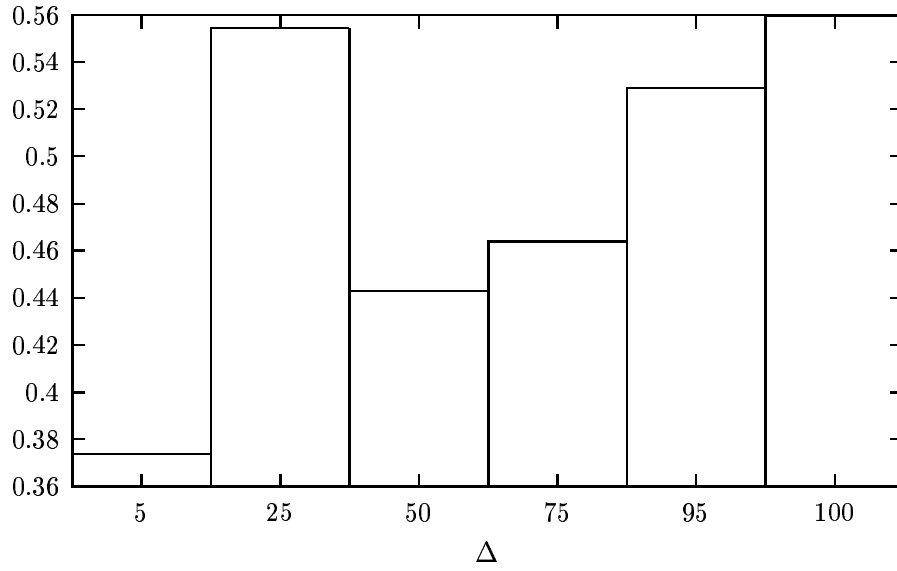
Figur 4.12: Gennemsnit for $\hat{\mathcal{U}}_{ghs}^4$



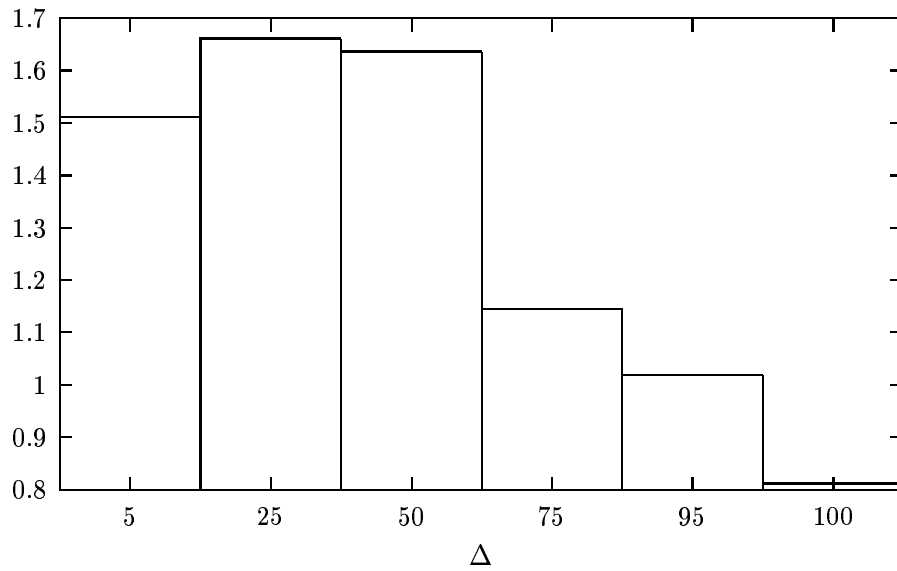
Figur 4.13: Gennemsnit for \mathcal{U}_{chm}^1



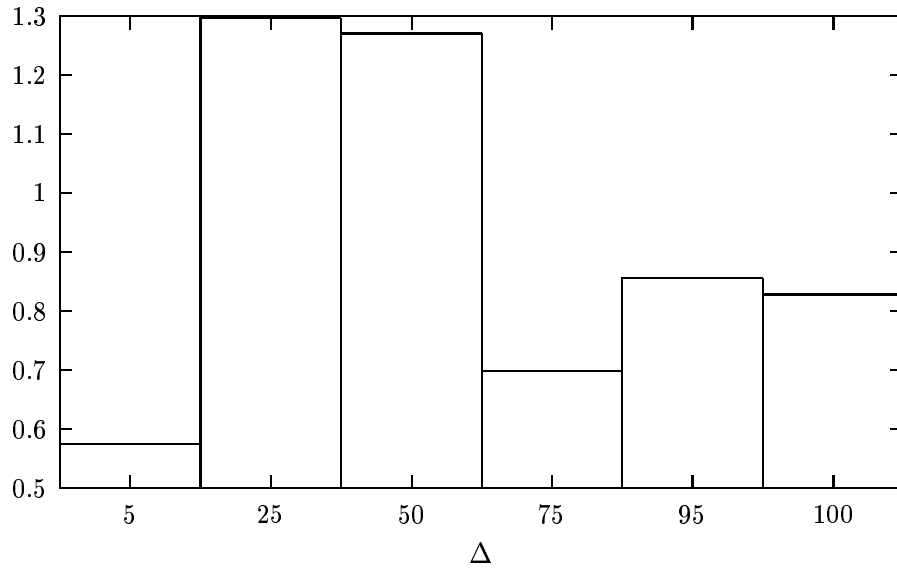
Figur 4.14: Gennemsnit for \mathcal{U}_{mv}^1



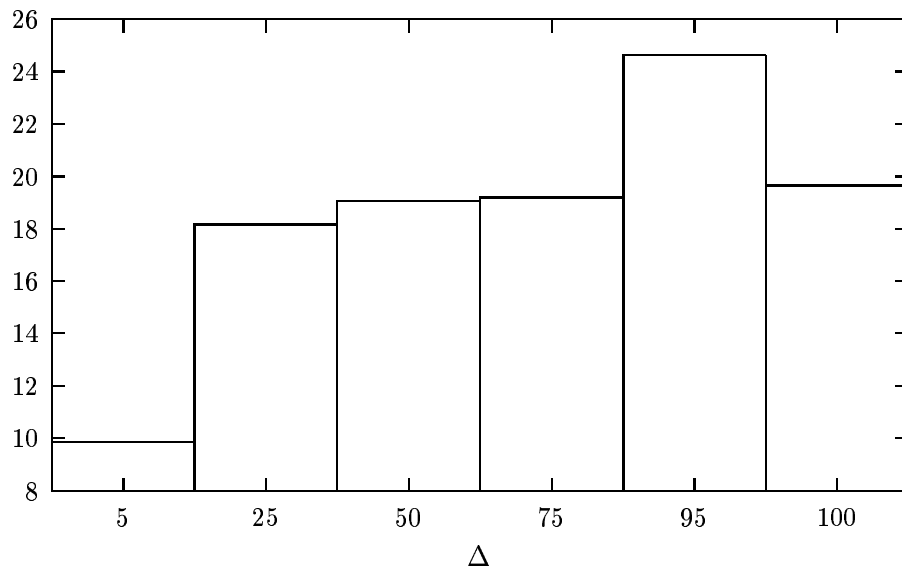
Figur 4.15: Gennemsnit for \bar{U}_{bfs}^1



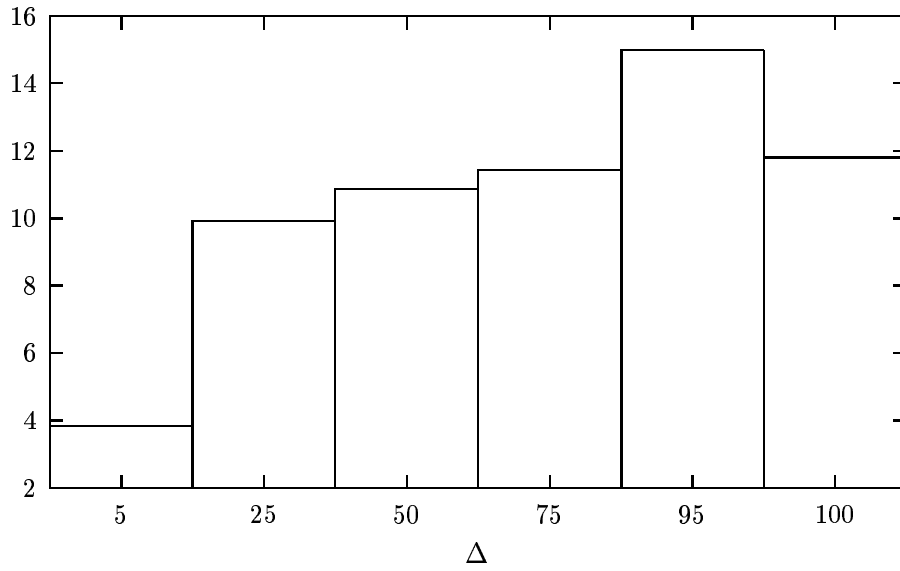
Figur 4.16: Gennemsnit for \bar{U}_{cpt}^1



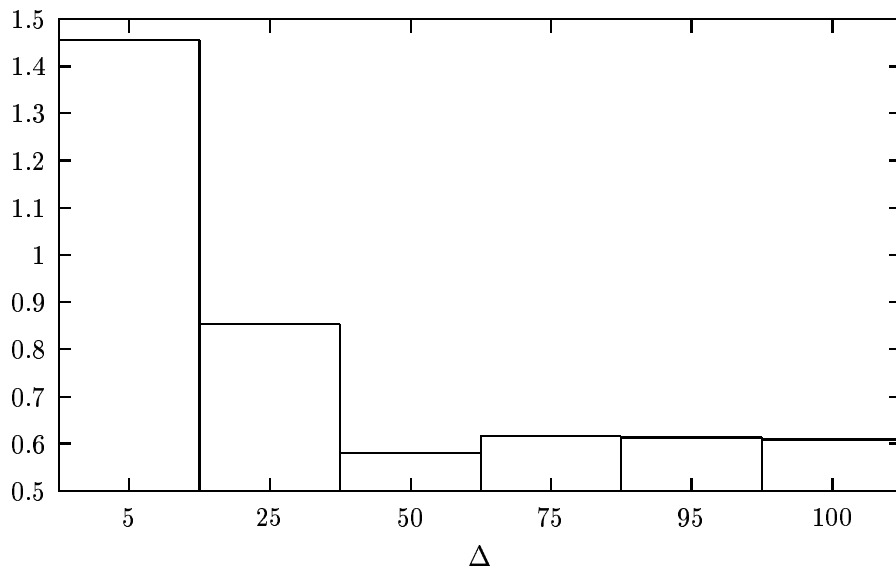
Figur 4.17: Gennemsnit for \mathcal{U}_{bc}^2



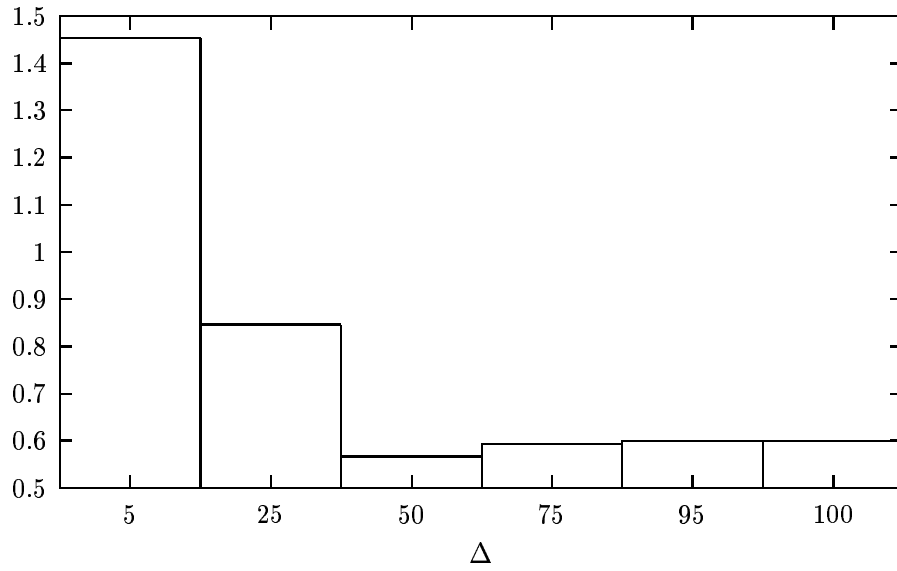
Figur 4.18: Gennemsnit for \mathcal{U}_{hrw}^1



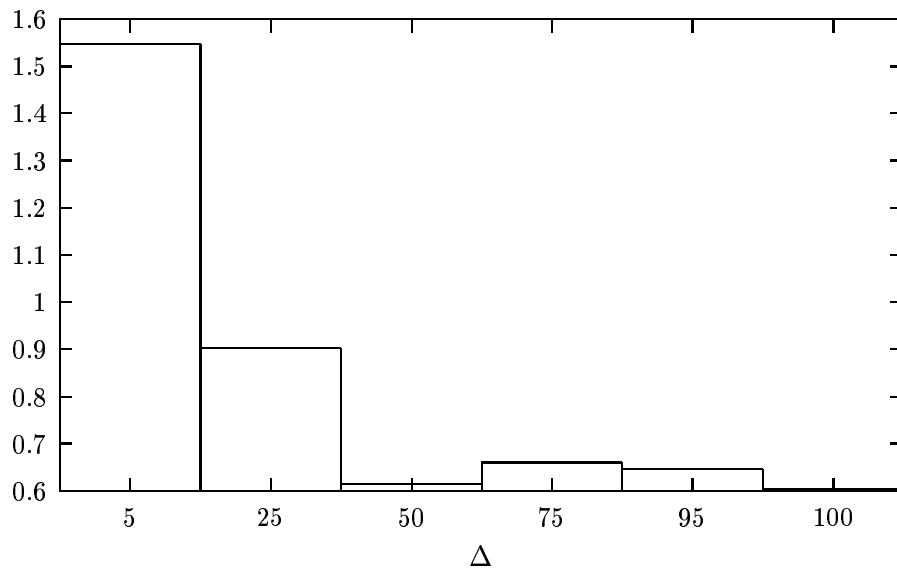
Figur 4.19: Gennemsnit for \mathcal{U}_{hrw}^2



Figur 4.20: Gennemsnit for \mathcal{U}_{hrw}^3



Figur 4.21: Gennemsnit for \mathcal{U}_{hrw}^4



Figur 4.22: Gennemsnit for \mathcal{U}_{hrw}^5

n	Δ	antal instanser
140	25	1
200	25	1
180	50	1

Figur 4.23: Instanser hvor der er brugt nedre grænseværdier i stedet for den korrekte løsning.

	n	Δ	nr	værdi 1	værdi 2
$U_{ghs}^1 \not\leq U_{chm}^1$	40	100	1	U_{chm}^1 : 44127	U_{ghs}^1 : 57937
$U_{chm}^1 \not\leq U_{ghs}^1$	40	25	7	U_{ghs}^1 : 22095	U_{chm}^1 : 22199
$U_{ghs}^2 \not\leq U_{chm}^1$	40	100	1	U_{chm}^1 : 44127	U_{ghs}^2 : 54336
$U_{chm}^1 \not\leq U_{ghs}^2$	40	25	7	U_{ghs}^2 : 22095	U_{chm}^1 : 22199
$U_{ghs}^3 \not\leq U_{chm}^1$	40	100	1	U_{chm}^1 : 44127	U_{ghs}^3 : 49305
$U_{chm}^1 \not\leq U_{ghs}^3$	40	100	10	U_{ghs}^3 : 22303	U_{chm}^1 : 22498
$U_{ghs}^4 \not\leq U_{chm}^1$	40	100	1	U_{chm}^1 : 44127	U_{ghs}^4 : 49156
$U_{chm}^1 \not\leq U_{ghs}^4$	40	100	10	U_{ghs}^4 : 22151	U_{chm}^1 : 22498
$\hat{U}_{ghs}^4 \not\leq \hat{U}_{chm}^1$	40	100	1	\hat{U}_{chm}^1 : 44127	\hat{U}_{ghs}^4 : 49065
$\hat{U}_{chm}^1 \not\leq \hat{U}_{ghs}^4$	40	100	10	\hat{U}_{ghs}^4 : 21929	\hat{U}_{chm}^1 : 22498
$U_{ghs}^3 \not\leq \bar{U}_{mv}^1$	40	100	1	\bar{U}_{mv}^1 : 44032	U_{ghs}^3 : 49305
$\bar{U}_{mv}^1 \not\leq U_{ghs}^3$	40	100	10	U_{ghs}^3 : 22303	\bar{U}_{mv}^1 : 22498
$U_{ghs}^4 \not\leq \bar{U}_{mv}^1$	40	100	1	\bar{U}_{mv}^1 : 44032	U_{ghs}^4 : 49156
$\bar{U}_{mv}^1 \not\leq U_{ghs}^4$	40	100	10	U_{ghs}^4 : 22151	\bar{U}_{mv}^1 : 22498
$\hat{U}_{ghs}^4 \not\leq \bar{U}_{mv}^1$	40	100	1	\bar{U}_{mv}^1 : 44032	\hat{U}_{ghs}^4 : 49065
$\bar{U}_{mv}^1 \not\leq \hat{U}_{ghs}^4$	40	100	10	\hat{U}_{ghs}^4 : 21929	\bar{U}_{mv}^1 : 22498
$U_{ghs}^1 \not\leq \bar{U}_{bfs}^1$	40	100	1	\bar{U}_{bfs}^1 : 44078	U_{ghs}^1 : 57937
$\bar{U}_{bfs}^1 \not\leq U_{ghs}^1$	40	25	7	U_{ghs}^1 : 22095	\bar{U}_{bfs}^1 : 22168
$U_{ghs}^2 \not\leq \bar{U}_{bfs}^1$	40	100	1	\bar{U}_{bfs}^1 : 44078	U_{ghs}^2 : 54336
$\bar{U}_{bfs}^1 \not\leq U_{ghs}^2$	40	25	7	U_{ghs}^2 : 22095	\bar{U}_{bfs}^1 : 22168
$U_{ghs}^3 \not\leq \bar{U}_{bfs}^1$	40	100	1	\bar{U}_{bfs}^1 : 44078	U_{ghs}^3 : 49305
$\bar{U}_{bfs}^1 \not\leq U_{ghs}^3$	40	25	7	U_{ghs}^3 : 22095	\bar{U}_{bfs}^1 : 22168

Tabel 4.1: Instanser der viser manglende dominansforhold.

	n	Δ	nr	værdi 1		værdi 2	
$U_{ghs}^4 \not\leq \bar{U}_{bfs}^1$	40	100	1	\bar{U}_{bfs}^1	44078	U_{ghs}^4	49156
$\bar{U}_{bfs}^1 \not\leq U_{ghs}^4$	40	25	7	U_{ghs}^4	22095	\bar{U}_{bfs}^1	22168
$\hat{U}_{ghs}^4 \not\leq \bar{U}_{bfs}^1$	40	100	1	\bar{U}_{bfs}^1	44078	\hat{U}_{ghs}^4	49065
$\bar{U}_{bfs}^1 \not\leq \hat{U}_{ghs}^4$	40	25	7	\hat{U}_{ghs}^4	22095	\bar{U}_{bfs}^1	22168
$U_{chm}^1 \not\leq \bar{U}_{bfs}^1$	40	100	1	\bar{U}_{bfs}^1	44078	U_{chm}^1	44127
$\bar{U}_{bfs}^1 \not\leq U_{chm}^1$	60	25	9	U_{chm}^1	8048	\bar{U}_{bfs}^1	8051
$\bar{U}_{mv}^1 \not\leq \bar{U}_{bfs}^1$	40	100	10	\bar{U}_{bfs}^1	20644	\bar{U}_{mv}^1	22498
$\bar{U}_{bfs}^1 \not\leq \bar{U}_{mv}^1$	40	100	1	\bar{U}_{mv}^1	44032	\bar{U}_{bfs}^1	44078
$U_{ghs}^1 \not\leq \bar{U}_{cpt}^1$	40	100	1	\bar{U}_{cpt}^1	44099	U_{ghs}^1	57937
$\bar{U}_{cpt}^1 \not\leq U_{ghs}^1$	40	25	7	U_{ghs}^1	22095	\bar{U}_{cpt}^1	22199
$U_{ghs}^2 \not\leq \bar{U}_{cpt}^1$	40	100	1	\bar{U}_{cpt}^1	44099	U_{ghs}^2	54336
$\bar{U}_{cpt}^1 \not\leq U_{ghs}^2$	40	25	7	U_{ghs}^2	22095	\bar{U}_{cpt}^1	22199
$U_{ghs}^3 \not\leq \bar{U}_{cpt}^1$	40	100	1	\bar{U}_{cpt}^1	44099	U_{ghs}^3	49305
$\bar{U}_{cpt}^1 \not\leq U_{ghs}^3$	40	25	7	U_{ghs}^3	22095	\bar{U}_{cpt}^1	22199
$U_{ghs}^4 \not\leq \bar{U}_{cpt}^1$	40	100	1	\bar{U}_{cpt}^1	44099	U_{ghs}^4	49156
$\bar{U}_{cpt}^1 \not\leq U_{ghs}^4$	40	25	7	U_{ghs}^4	22095	\bar{U}_{cpt}^1	22199
$\hat{U}_{ghs}^4 \not\leq \bar{U}_{cpt}^1$	40	100	1	\bar{U}_{cpt}^1	44099	\hat{U}_{ghs}^4	49065
$\bar{U}_{cpt}^1 \not\leq \hat{U}_{ghs}^4$	40	25	7	\hat{U}_{ghs}^4	22095	\bar{U}_{cpt}^1	22199
$U_{chm}^1 \not\leq \bar{U}_{cpt}^1$	40	100	1	\bar{U}_{cpt}^1	44099	U_{chm}^1	44127
$\bar{U}_{cpt}^1 \not\leq U_{chm}^1$	40	100	2	U_{chm}^1	72897	\bar{U}_{cpt}^1	72900
$\bar{U}_{mv}^1 \not\leq \bar{U}_{cpt}^1$	40	100	10	\bar{U}_{cpt}^1	20722	\bar{U}_{mv}^1	22498
$\bar{U}_{cpt}^1 \not\leq \bar{U}_{mv}^1$	40	100	1	\bar{U}_{mv}^1	44032	\bar{U}_{cpt}^1	44099
$\bar{U}_{bfs}^1 \not\leq \bar{U}_{cpt}^1$	140	5	3	\bar{U}_{cpt}^1	3207	\bar{U}_{bfs}^1	3422
$\bar{U}_{cpt}^1 \not\leq \bar{U}_{bfs}^1$	40	100	1	\bar{U}_{bfs}^1	44078	\bar{U}_{cpt}^1	44099
$U_{ghs}^1 \not\leq U_{bc}^2$	40	100	1	U_{bc}^2	44070	U_{ghs}^1	57937
$U_{bc}^2 \not\leq U_{ghs}^1$	40	25	7	U_{ghs}^1	22095	U_{bc}^2	22154
$U_{ghs}^2 \not\leq U_{bc}^2$	40	100	1	U_{bc}^2	44070	U_{ghs}^2	54336
$U_{bc}^2 \not\leq U_{ghs}^2$	40	25	7	U_{ghs}^2	22095	U_{bc}^2	22154
$U_{ghs}^3 \not\leq U_{bc}^2$	40	100	1	U_{bc}^2	44070	U_{ghs}^3	49305
$U_{bc}^2 \not\leq U_{ghs}^3$	40	25	7	U_{ghs}^3	22095	U_{bc}^2	22154
$U_{ghs}^4 \not\leq U_{bc}^2$	40	100	1	U_{bc}^2	44070	U_{ghs}^4	49156
$U_{bc}^2 \not\leq U_{ghs}^4$	40	25	7	U_{ghs}^4	22095	U_{bc}^2	22154
$\hat{U}_{ghs}^4 \not\leq U_{bc}^2$	40	100	1	U_{bc}^2	44070	\hat{U}_{ghs}^4	49065
$U_{bc}^2 \not\leq \hat{U}_{ghs}^4$	40	25	7	\hat{U}_{ghs}^4	22095	U_{bc}^2	22154
$\bar{U}_{mv}^1 \not\leq U_{bc}^2$	40	100	10	U_{bc}^2	20661	\bar{U}_{mv}^1	22498

Tabel 4.1: Instanser der viser manglende dominansforhold.

	n	Δ	nr	værdi 1	værdi 2	
$U_{bc}^2 \not\leq \bar{U}_{mv}^1$	40	100	1	\bar{U}_{mv}^1 :	44032	U_{bc}^2 : 44070
$\bar{U}_{bfs}^1 \not\leq U_{bc}^2$	40	100	1	U_{bc}^2 :	44070	\bar{U}_{bfs}^1 : 44078
$U_{bc}^2 \not\leq \bar{U}_{bfs}^1$	40	100	10	\bar{U}_{bfs}^1 :	20644	U_{bc}^2 : 20661
$U_{ghs}^1 \not\leq U_{hrw}^1$	40	100	1	U_{hrw}^1 :	52834	U_{ghs}^1 : 57937
$U_{hrw}^1 \not\leq U_{ghs}^1$	40	100	2	U_{ghs}^1 :	75700	U_{hrw}^1 : 76003
$U_{ghs}^2 \not\leq U_{hrw}^1$	40	100	1	U_{hrw}^1 :	52834	U_{ghs}^2 : 54336
$U_{hrw}^1 \not\leq U_{ghs}^2$	40	100	10	U_{ghs}^2 :	26244	U_{hrw}^1 : 30386
$U_{ghs}^3 \not\leq U_{hrw}^1$	40	25	10	U_{hrw}^1 :	6495	U_{ghs}^3 : 8366
$U_{hrw}^1 \not\leq U_{ghs}^3$	40	100	1	U_{ghs}^3 :	49305	U_{hrw}^1 : 52834
$U_{ghs}^4 \not\leq U_{hrw}^1$	40	25	10	U_{hrw}^1 :	6495	U_{ghs}^4 : 8266
$U_{hrw}^1 \not\leq U_{ghs}^4$	40	100	1	U_{ghs}^4 :	49156	U_{hrw}^1 : 52834
$\hat{U}_{ghs}^4 \not\leq U_{hrw}^1$	40	25	10	U_{hrw}^1 :	6495	\hat{U}_{ghs}^4 : 8087
$U_{hrw}^1 \not\leq \hat{U}_{ghs}^4$	40	100	1	\hat{U}_{ghs}^4 :	49065	U_{hrw}^1 : 52834
$U_{ghs}^1 \not\leq U_{hrw}^2$	40	100	1	U_{hrw}^2 :	48165	U_{ghs}^1 : 57937
$U_{hrw}^2 \not\leq U_{ghs}^1$	40	25	7	U_{ghs}^1 :	22095	U_{hrw}^2 : 22208
$U_{ghs}^2 \not\leq U_{hrw}^2$	40	100	1	U_{hrw}^2 :	48165	U_{ghs}^2 : 54336
$U_{hrw}^2 \not\leq U_{ghs}^2$	40	100	10	U_{ghs}^2 :	26244	U_{hrw}^2 : 27241
$U_{ghs}^3 \not\leq U_{hrw}^2$	40	100	1	U_{hrw}^2 :	48165	U_{ghs}^3 : 49305
$U_{hrw}^2 \not\leq U_{ghs}^3$	40	100	10	U_{ghs}^3 :	22303	U_{hrw}^2 : 27241
$U_{ghs}^4 \not\leq U_{hrw}^2$	40	100	1	U_{hrw}^2 :	48165	U_{ghs}^4 : 49156
$U_{hrw}^2 \not\leq U_{ghs}^4$	40	100	10	U_{ghs}^4 :	22151	U_{hrw}^2 : 27241
$\hat{U}_{ghs}^4 \not\leq U_{hrw}^2$	40	100	1	U_{hrw}^2 :	48165	\hat{U}_{ghs}^4 : 49065
$U_{hrw}^2 \not\leq \hat{U}_{ghs}^4$	40	100	10	\hat{U}_{ghs}^4 :	21929	U_{hrw}^2 : 27241
$\bar{U}_{cpt}^1 \not\leq U_{hrw}^2$	40	5	2	U_{hrw}^2 :	3207	\bar{U}_{cpt}^1 : 3229
$U_{hrw}^2 \not\leq \bar{U}_{cpt}^1$	40	100	1	\bar{U}_{cpt}^1 :	44099	U_{hrw}^2 : 48165
$U_{ghs}^1 \not\leq U_{hrw}^3$	40	100	1	U_{hrw}^3 :	44087	U_{ghs}^1 : 57937
$U_{hrw}^3 \not\leq U_{ghs}^1$	40	25	7	U_{ghs}^1 :	22095	U_{hrw}^3 : 22201
$U_{ghs}^2 \not\leq U_{hrw}^3$	40	100	1	U_{hrw}^3 :	44087	U_{ghs}^2 : 54336
$U_{hrw}^3 \not\leq U_{ghs}^2$	40	25	7	U_{ghs}^2 :	22095	U_{hrw}^3 : 22201
$U_{ghs}^3 \not\leq U_{hrw}^3$	40	100	1	U_{hrw}^3 :	44087	U_{ghs}^3 : 49305
$U_{hrw}^3 \not\leq U_{ghs}^3$	40	25	7	U_{ghs}^3 :	22095	U_{hrw}^3 : 22201
$U_{ghs}^4 \not\leq U_{hrw}^3$	40	100	1	U_{hrw}^3 :	44087	U_{ghs}^4 : 49156
$U_{hrw}^3 \not\leq U_{ghs}^4$	40	25	7	U_{ghs}^4 :	22095	U_{hrw}^3 : 22201
$\hat{U}_{ghs}^4 \not\leq U_{hrw}^3$	40	100	1	U_{hrw}^3 :	44087	\hat{U}_{ghs}^4 : 49065
$U_{hrw}^3 \not\leq \hat{U}_{ghs}^4$	40	25	7	\hat{U}_{ghs}^4 :	22095	U_{hrw}^3 : 22201
$U_{chm}^1 \not\leq U_{hrw}^3$	40	100	1	U_{hrw}^3 :	44087	U_{chm}^1 : 44127
$U_{hrw}^3 \not\leq U_{chm}^1$	40	25	2	U_{chm}^1 :	3367	U_{hrw}^3 : 3405
$\bar{U}_{mv}^1 \not\leq U_{hrw}^3$	40	100	10	U_{hrw}^3 :	20713	\bar{U}_{mv}^1 : 22498

Tabel 4.1: Instanser der viser manglende dominansforhold.

	n	Δ	nr	værdi 1	værdi 2	
$U_{hrw}^3 \not\leq \bar{U}_{mv}^1$	40	100	1	\bar{U}_{mv}^1 :	44032	U_{hrw}^3 : 44087
$\bar{U}_{bfs}^1 \not\leq U_{hrw}^3$	100	50	1	U_{hrw}^3 :	109019	\bar{U}_{bfs}^1 : 109098
$U_{hrw}^3 \not\leq \bar{U}_{bfs}^1$	40	100	1	\bar{U}_{bfs}^1 :	44078	U_{hrw}^3 : 44087
$\bar{U}_{cpt}^1 \not\leq U_{hrw}^3$	40	100	1	U_{hrw}^3 :	44087	\bar{U}_{cpt}^1 : 44099
$U_{hrw}^3 \not\leq \bar{U}_{cpt}^1$	40	25	1	\bar{U}_{cpt}^1 :	1509	U_{hrw}^3 : 1632
$U_{bc}^2 \not\leq U_{hrw}^3$	40	25	6	U_{hrw}^3 :	8465	U_{bc}^2 : 8577
$U_{hrw}^3 \not\leq U_{bc}^2$	40	100	1	U_{bc}^2 :	44070	U_{hrw}^3 : 44087
$U_{ghs}^1 \not\leq U_{hrw}^4$	40	100	1	U_{hrw}^4 :	44087	U_{ghs}^1 : 57937
$U_{hrw}^4 \not\leq U_{ghs}^1$	40	25	7	U_{ghs}^1 :	22095	U_{hrw}^4 : 22201
$U_{ghs}^2 \not\leq U_{hrw}^4$	40	100	1	U_{hrw}^4 :	44087	U_{ghs}^2 : 54336
$U_{hrw}^4 \not\leq U_{ghs}^2$	40	25	7	U_{ghs}^2 :	22095	U_{hrw}^4 : 22201
$U_{ghs}^3 \not\leq U_{hrw}^4$	40	100	1	U_{hrw}^4 :	44087	U_{ghs}^3 : 49305
$U_{hrw}^4 \not\leq U_{ghs}^3$	40	25	7	U_{ghs}^3 :	22095	U_{hrw}^4 : 22201
$U_{ghs}^4 \not\leq U_{hrw}^4$	40	100	1	U_{hrw}^4 :	44087	U_{ghs}^4 : 49156
$U_{hrw}^4 \not\leq U_{ghs}^4$	40	25	7	U_{ghs}^4 :	22095	U_{hrw}^4 : 22201
$\hat{U}_{ghs}^4 \not\leq U_{hrw}^4$	40	100	1	U_{hrw}^4 :	44087	\hat{U}_{ghs}^4 : 49065
$U_{hrw}^4 \not\leq \hat{U}_{ghs}^4$	40	25	7	\hat{U}_{ghs}^4 :	22095	U_{hrw}^4 : 22201
$U_{chm}^1 \not\leq U_{hrw}^4$	40	100	1	U_{hrw}^4 :	44087	U_{chm}^1 : 44127
$U_{hrw}^4 \not\leq U_{chm}^1$	40	25	2	U_{chm}^1 :	3367	U_{hrw}^4 : 3404
$\bar{U}_{mv}^1 \not\leq U_{hrw}^4$	40	100	10	U_{hrw}^4 :	20712	\bar{U}_{mv}^1 : 22498
$U_{hrw}^4 \not\leq \bar{U}_{mv}^1$	40	100	1	\bar{U}_{mv}^1 :	44032	U_{hrw}^4 : 44087
$\bar{U}_{bfs}^1 \not\leq U_{hrw}^4$	100	50	1	U_{hrw}^4 :	109006	\bar{U}_{bfs}^1 : 109098
$U_{hrw}^4 \not\leq \bar{U}_{bfs}^1$	40	100	1	\bar{U}_{bfs}^1 :	44078	U_{hrw}^4 : 44087
$\bar{U}_{cpt}^1 \not\leq U_{hrw}^4$	40	100	1	U_{hrw}^4 :	44087	\bar{U}_{cpt}^1 : 44099
$U_{hrw}^4 \not\leq \bar{U}_{cpt}^1$	40	25	1	\bar{U}_{cpt}^1 :	1509	U_{hrw}^4 : 1628
$U_{bc}^2 \not\leq U_{hrw}^4$	40	25	6	U_{hrw}^4 :	8464	U_{bc}^2 : 8577
$U_{hrw}^4 \not\leq U_{bc}^2$	40	100	1	U_{bc}^2 :	44070	U_{hrw}^4 : 44087
$U_{ghs}^1 \not\leq U_{hrw}^5$	40	100	1	U_{hrw}^5 :	44087	U_{ghs}^1 : 57937
$U_{hrw}^5 \not\leq U_{ghs}^1$	40	25	7	U_{ghs}^1 :	22095	U_{hrw}^5 : 22200
$U_{ghs}^2 \not\leq U_{hrw}^5$	40	100	1	U_{hrw}^5 :	44087	U_{ghs}^2 : 54336
$U_{hrw}^5 \not\leq U_{ghs}^2$	40	25	7	U_{ghs}^2 :	22095	U_{hrw}^5 : 22200
$U_{ghs}^3 \not\leq U_{hrw}^5$	40	100	1	U_{hrw}^5 :	44087	U_{ghs}^3 : 49305
$U_{hrw}^5 \not\leq U_{ghs}^3$	40	25	7	U_{ghs}^3 :	22095	U_{hrw}^5 : 22200
$U_{ghs}^4 \not\leq U_{hrw}^5$	40	100	1	U_{hrw}^5 :	44087	U_{ghs}^4 : 49156
$U_{hrw}^5 \not\leq U_{ghs}^4$	40	25	7	U_{ghs}^4 :	22095	U_{hrw}^5 : 22200
$\hat{U}_{ghs}^4 \not\leq U_{hrw}^5$	40	100	1	U_{hrw}^5 :	44087	\hat{U}_{ghs}^4 : 49065
$U_{hrw}^5 \not\leq \hat{U}_{ghs}^4$	40	25	7	\hat{U}_{ghs}^4 :	22095	U_{hrw}^5 : 22200
$U_{chm}^1 \not\leq U_{hrw}^5$	40	100	1	U_{hrw}^5 :	44087	U_{chm}^1 : 44127

Tabel 4.1: Instanser der viser manglende dominansforhold.

	n	Δ	nr	værdi 1	værdi 2		
$U_{hrw}^5 \not\leq U_{chm}^1$	40	25	2	U_{chm}^1 :	3367	U_{hrw}^5 :	3403
$\bar{U}_{mv}^1 \not\leq U_{hrw}^5$	40	100	10	U_{hrw}^5 :	20712	\bar{U}_{mv}^1 :	22498
$U_{hrw}^5 \not\leq \bar{U}_{mv}^1$	40	100	1	\bar{U}_{mv}^1 :	44032	U_{hrw}^5 :	44087
$\bar{U}_{bfs}^1 \not\leq U_{hrw}^5$	100	50	1	U_{hrw}^5 :	109001	\bar{U}_{bfs}^1 :	109098
$U_{hrw}^5 \not\leq \bar{U}_{bfs}^1$	40	100	1	\bar{U}_{bfs}^1 :	44078	U_{hrw}^5 :	44087
$\bar{U}_{cpt}^1 \not\leq U_{hrw}^5$	40	100	1	U_{hrw}^5 :	44087	\bar{U}_{cpt}^1 :	44099
$U_{hrw}^5 \not\leq \bar{U}_{cpt}^1$	40	25	1	\bar{U}_{cpt}^1 :	1509	U_{hrw}^5 :	1626
$U_{bc}^2 \not\leq U_{hrw}^5$	40	25	6	U_{hrw}^5 :	8464	U_{bc}^2 :	8577
$U_{hrw}^5 \not\leq U_{bc}^2$	40	100	1	U_{bc}^2 :	44070	U_{hrw}^5 :	44087

Tabel 4.1: Instanser der viser manglende dominansforhold.

Litteratur

- [1] A. Billionnet and A. Sutter (1994) “Minimization of a quadratic pseudo-Boolean function”, *European journal of operational research* **78**,106-115.
- [2] P. L. Hammer and D. J. Rader (1994). “Efficient methodes for solving quadratic 0-1 knapsack problems” *Rutcor Research report*.
- [3] G. Gallo, P. L. Hammer and B. Simeone (1978). “Quadratic knapsack problems”. *Mathematical programing (study)***12**, North-holland publishing company, 132-149.
- [4] A. Billionnet, A. Faye and E. Soutif (1999). “A new upper bound for the 0-1 quadratic knapsack problem”, *European journal of operational research* **112**, 664-672.
- [5] A. Caprara, D. Pisinger and P. Toth (1998). “Exact solution of the quadratic knapsack problem”. *Technical repport 98/21. DIKU, University of Copenhagen, Denmark*.
- [6] A. Billionnet and F. Calmels. (1993) “Linear programing for the 0-1 quadratic knapsack problem”. *European journal of operational research* **92**, 310-325.
- [7] L. A. Wolsey. (1998) “Integer programing”. *John Wiley & Sons*.
- [8] P. Chaillou, P. Hansen og Y. Mahieu (1996). “Best network flow bounds of quadratic knapsack problem”. *Lecture notes in mathematics*. 1403:226-235.
- [9] P. Michelon og L. Veilleux (1994). “Lagrangean methods for the 0-1 Quadratic Knapsack Problem”. *European Journal of Operational Research* **92**(1996) 326-341.
- [10] G. Gallo, M. D. Grigoriadis og R. E. Tarjan (1989). “A fast parametric maximum flow algortihm and applications”. *Siam journal of computing*, vol. 18, No. 1 30-55
- [11] <http://fewcal.kub.nl/sturm/software/sedumi.html>

- [12] <ftp://plato.asu.edu/pub/sdplib.txt>
- [13] C. Witzgall. Mathematical methods for site selection for electronic messaging system. Technical report. NBS internal report, 1975.
- [14] E. L. Johnson, A. Mehrota og G.L. Nemhauser. Min-cut clustering. *Mathematical programming* 62:133-152 , 1993.
- [15] C. Helmberg, R. Rendel og R. Weismantel. A semidifinit programming approach to the quadratic knapsack problem. *Journal of combinatorial optimization* 4:197-215,2000.
- [16] Udkast til kapitel om **QK**. D. Pisinger.
- [17] <http://www.diku.dk/~pisinger/codes>
- [18] C. Helmberg, S. Poljak, F. Rendl, H. Wolkowicz. "Integer Programming and Combinatorial Optimization" *Proceedings of the 4th International IPCO Conference, Copenhagen, Denmark, May 1995*